Kapitel 2

Mængder og funktioner

2.1 Mængder

Begrebet *mængde* er grundlæggende i matematikken, og derfor vil vi behandle noget terminologi og notation vedrørende mængder i dette afsnit.

Grundlæggende er en mængde A en måde at samle elementer i et "bundt" på, som udgør ét objekt. Hvis vi som et eksempel vil opskrive en mængde bestående af tallene 0 og 1, skriver vi $\{0, 1\}$. Dette er et eksempel på en mængde med to elementer. Elementerne behøver ikke at være tal men kunne i princippet være hvad som helst. Gentagelse af elementer gør ikke en mængde større, forstået sådan at hvis et element optræder to eller flere gange i en mængde, kan alle dets dubletter fjernes. For eksempel har man $\{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$ og $\{1, 1, 1, 1\} = \{1\}$. Også den rækkefølge, hvori elementerne er opskrevet i en mængde, er uden betydning. Derfor er for eksempel $\{0, 1\} = \{1, 0\}$.

Nogle mængder af tal bruges så ofte, at der findes en standardnotation for dem:

$\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$	mængden af *naturlige tal*,
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	mængden af *heltal*,
	og
$\mathbb{R}$	mængden af alle *reelle tal*.

At sige, at a tilhører eller er et element i mængden A, udtrykkes som: $a \in A$. Nogle forfattere foretrækker at skrive mængden først og derefter elementet, altså $A \ni a$ i stedet for $a \in A$. Hvis et element a ikke tilhører mængden A, kan man benytte negationen fra udsagnslogikken og skrive $\neg(a \in A)$. Dette kan dog også skrives som $a \notin A$. Hvis to elementer tilhører samme mængde, altså for eksempel $a_1 \in A$ og $a_2 \in A$, vil man typisk skrive $a_1, a_2 \in A$.

Eksempel 2.1.1
Vi har, at $1 \in \mathbb{N}$ og at $-1 \in \mathbb{Z}$, mens $-1 \notin \mathbb{N}$. Derudover har vi, at $\pi \in \mathbb{R}$, mens $\pi \notin \mathbb{Z}$, da $\pi \approx 3.1415$ ikke er et heltal.

En mængde bestemmes af dets elementer, hvilket betyder, at to mængder A og B er ens, $A = B$, hvis og kun hvis de indeholder de samme elementer. Med andre ord er $A = B$, hvis og kun hvis der for alle elementer a gælder, at $a \in A \Leftrightarrow a \in B$. Hvis A og B er mængder, kaldes B en *delmængde* af A, hvis ethvert element i B også er et element i A. Sædvanlig notation for dette er $B \subseteq A$. Med andre ord er udsagnet $B \subseteq A$ pr. definition sandt, hvis og kun hvis udsagnet $a \in B \Rightarrow a \in A$ er sandt for alle elementer a. Naturligvis er $A \subseteq A$, da implikationen $a \in A \Rightarrow a \in A$ er sand for alle a. I stedet for at skrive $B \subseteq A$ kan man også skrive $A \supseteq B$.

Den *tomme mængde* er mængden, der ikke indeholder nogen elementer overhovedet. Den betegnes sædvanligvis ved $\emptyset$, inspireret af bogstavet Ø fra det danske og norske alfabet. Nogle forfattere bruger $\{\}$ for den tomme mængde, men vi vil altid benytte notationen $\emptyset$ for den. Den tomme mængde $\emptyset$ er en delmængde af enhver anden mængde A.

Hvis man ønsker at understrege, at en mængde B er en delmængde af A men ikke lig med hele A, skriver man $B \subsetneq A$, alternativt $A \supsetneq B$. Endelig, hvis man vil udtrykke i en formel, at B ikke er en delmængde af A, kan det logiske negationssymbol $\neg$ benyttes, ved at der skrives $\neg(B \subseteq A)$. Det er dog mere almindeligt at skrive $B \not\subseteq A$, alternativt $A \not\supseteq B$.

Eksempel 2.1.2
Da ethvert naturligt tal er et heltal, har vi $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$. Ethvert heltal $n \in \mathbb{Z}$ er også et reelt tal. Derfor er $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$. Vi har endda $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ og $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$. For at vise $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$ skal vi blot sikre os, at $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ (hvilket vi allerede har observeret), samt at $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$. Da $-1 \in \mathbb{Z}$, mens $-1 \notin \mathbb{N}$, kan vi konkludere, at $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$. Ligeledes er $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{R}$, da $\pi \in \mathbb{R}$, mens $\pi \notin \mathbb{Z}$.

En sædvanlig måde at konstruere delmængder af en mængde A på er ved at vælge elementer fra det, for hvilke et vist logisk udtryk er sandt. For notationens skyld vil vi lade $P(a)$ betegne et sådant logisk udtryk. $\{a \in A \mid P(a)\}$ betegner dermed netop den delmængde af A, der består af de elementer $a \in A$, for hvilke det logiske udtryk $P(a)$ er sandt.

Eksempel 2.1.3
Lad $\mathbb{Z}$ som før være mængden af heltal. Så er $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 1\}$ mængden $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$, og $\{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 3\} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Ligeledes er $\{a \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq a \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Eksempel 2.1.4
Blandt standardnotationerne, hvoraf vi allerede har introduceret $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ og $\mathbb{R}$, er endnu et eksempel mængden $\mathbb{Q}$: mængden af alle *rationelle tal*, det vil sige mængden af brøker af heltal. Mere præcist har vi

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Dette betyder, at et element i $\mathbb{Q}$ kan skrives på formen a/b, hvor både a og b er heltal, mens b ikke er nul. Bemærk, at brøker som $1/2$ og $2/4$ er ens, da $2/4$ kan reduceres til $1/2$ ved, at både tæller og nævner divideres med 2. Mere generelt er to brøker a/b og c/d ens, hvis og kun hvis $ad = bc$.

Da ethvert heltal $n \in \mathbb{Z}$ kan skrives som $n/1$, har vi, at $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Omvendt ser vi dog, at mens $1/2 \in \mathbb{Q}$, så er $1/2 \notin \mathbb{Z}$, hvorfor vi har $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$. Yderligere er enhver brøk af heltal et reelt tal, så $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. Det viser sig, at $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. En måde at indse dette på er at finde et reelt tal, der ikke kan skrives som en brøk af heltal. Et eksempel på et sådant reelt tal er $\sqrt{2}$, men vi vil ikke vise her, hvorfor $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Hvis to reelle tal a og b er givet, således at $a < b$, kan man definere en type af delmængder i $\mathbb{R}$, der kaldes *intervaller*. Disse er:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

og

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Intervaller af formen $[a, b]$ kaldes *lukkede* , mens intervaller af formen $]a, b[$ kaldes *åbne*.

Man vil også typisk definere

$$\mathbb{R}_{\geq a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\},$$

$$\mathbb{R}_{>a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\},$$

$$\mathbb{R}_{\leq a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$$

og

$$\mathbb{R}_{<a} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.$$

Eksempel 2.1.5

Intervallet $]0, 1]$ består af alle reelle tal x, der opfylder $0 < x \leq 1$. Dette interval er hverken lukket eller åbent. Mængden $\mathbb{R}_{\geq 0}$ er mængden af alle ikke-negative, reelle tal, mens $\mathbb{R}_{>0}$ er mængden af alle positive, reelle tal. Notationen $\mathbb{R}_+$ benyttes også ofte til at betegne mængden af alle positive, reelle tal.

Det føles intuitivt, at to mængder er ens, hvis og kun hvis de er delmængder af hinanden. Lad os mere præcist forklare, hvorfor dette er sandt, og opskrive det som en lemma.

Lemma 2.1.1

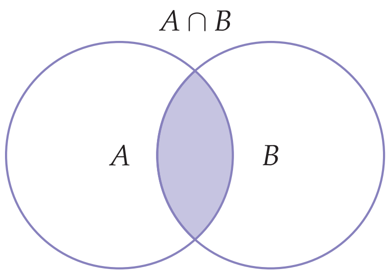
Lad A og B være to mængder. Da er $A = B$, hvis og kun hvis $A \subseteq B$ og $A \supseteq B$.

Bevis. Udsagnet $A = B$ for to mængder A og B er logisk ækvivalent med udsagnet $a \in A \Leftrightarrow a \in B$ for alle a. Ved hjælp af Ligning (1.22) kan vi opdele biimplikationen i to implikationer. Derefter får vi det logisk ækvivalente udsagn $(a \in A \Rightarrow a \in B) \quad \wedge \quad (a \in A \Leftarrow a \in B)$ for alle a. Dette er ækvivalent med udsagnet $A \subseteq B \quad \wedge \quad A \supseteq B$. □

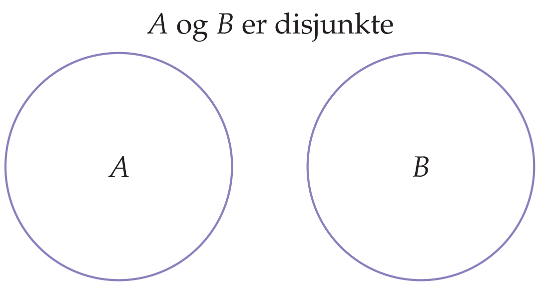
I stedet for $\subseteq$ og $\supseteq$ foretrækker nogle forfattere symbolerne $\subset$ og $\supset$. Men endnu andre forfattere bruger symbolerne $\subset$ og $\supset$ med den ovenfor beskrevne betydning af $\subsetneq$ og $\supsetneq$, inspireret af brugen af $<$ og $>$ til angivelse af skarpe uligheder. For at undgå forvirring vil vi ikke benytte symbolerne $\subset$ eller $\supset$.

Lad os nu definere nogle grundlæggende mængdeoperationer, som vi får brug for senere hen. Disse eksemplificeres i Eksempel 2.1.6. Som den første definerer vi for to mængder A og B *fællesmængden* af A og B, betegnet $A \cap B$, som mængden bestående af alle elementer, der er både i A og i B. Med andre ord:

$$A \cap B = \{a \mid a \in A \wedge a \in B\}. \tag{2.1}$$

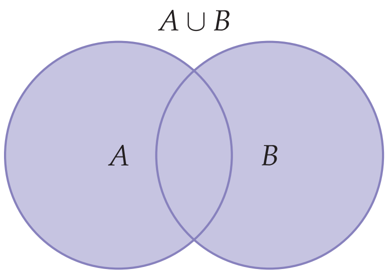


To mængder A og B kaldes *disjunkte*, hvis $A \cap B = \emptyset$.

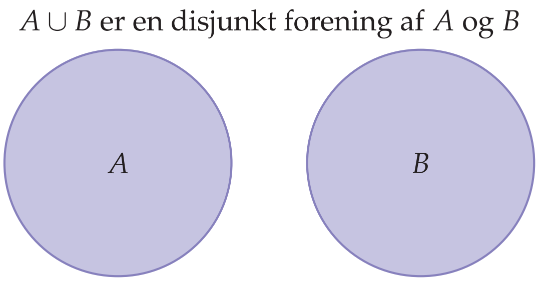


Foreningsmængden af A og B er defineret som:

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \vee a \in B\}. \tag{2.2}$$

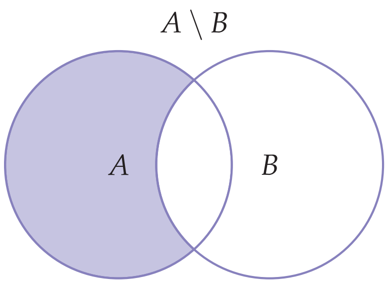


Foreningsmængden $A \cup B$ kaldes en *disjunkt forening* af A og B, hvis $A \cap B = \emptyset$.



Mængdedifferencen af A og B, som kan udtales A minus B, defineres ved:

$$A \setminus B = \{a \mid a \in A \land a \notin B\}.$$



Afslutningsvis definerer vi *det kartesiske produkt* af A og B som mængden:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \land b \in B\}.$$

Det kartesiske produkt af to mængder A og B er simpelthen mængden af alle par (a, b), hvis første koordinat kommer fra A, og hvis anden koordinat kommer fra B. Det kartesiske produkt af en mængde A med sig selv betegnes typisk A^2. Med andre ord: $A^2 = A \times A$.

Vi kommer hovedsageligt til at benytte det kartesiske produkt af to mængder, men definitionen af det kartesiske produkt udvides nemt til at involvere flere mængder end blot to. Man inkluderer blot flere koordinater, én fra hver mængde, i det kartesiske produkt. Som et eksempel er $A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B \text{ og } c \in C\}$. Mere generelt, hvis n er et positivt heltal, og $A_1, \ldots, A_n$ er mængder, så er

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Hvis alle mængder er ens, for eksempel $A_1 = A, \ldots, A_n = A$, skrives typisk A^n for deres kartesiske produkt. Med andre ord:

$$A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A, \ldots, a_n \in A\}. \tag{2.3}$$

Lad os illustrere de introducerede mængdebegreber i et eksempel.

Eksempel 2.1.6

Lad $1, 2, 3$ og 4 være de første fire positive heltal. Så haves følgende:

(a) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ og faktisk $\{1, 2\} \subsetneq \{1, 2, 3\}$,

(b) $\{1, 2\} \supseteq \{2\}$ og faktisk $\{1, 2\} \supsetneq \{2\}$,

(c) $\{1, 4\} \not\subseteq \{1, 2, 3\}$,

(d) $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$,

(e) $\{1, 2\}$ og $\{3\}$ er disjunkte mængder,

(f) $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$,

(g) $\{1, 2, 3, 4\}$ er den disjunkte forening af $\{1, 2\}$ og $\{3, 4\}$,

(h) $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4\} = \{1\}$,

(i) $\{2, 3, 4\} \setminus \{1, 2, 3, 4\} = \emptyset$,

(j) $\{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$,

(k) $\{1, 2\}^2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$.

I Ligningerne (2.1) og (2.2) var de logiske operatorer $\wedge$ og $\vee$ nyttige. I Sætning 1.3.1 oplistede vi forskellige egenskaber for disse to logiske operatorer. Vi kan her benytte dem til at vise tilsvarende egenskaber for fællesmængder og foreningsmængder:

Sætning 2.1.2

Lad A, B og C være mængder. Da haves følgende:

$$A \cap A = A \tag{2.4}$$
$$A \cup A = A \tag{2.5}$$
$$A \cup B = B \cup A \tag{2.6}$$

$$
\begin{aligned}
A \cap B &= B \cap A && (2.7)\\
A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C && (2.8)\\
A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C && (2.9)\\
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) && (2.10)\\
A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) && (2.11)
\end{aligned}
$$

Bevis. Lad os bevise sidstnævnte, altså Ligning (2.11). Beviset af de resterende overlades til læseren. Ifølge Ligning (2.1) har vi

$$B \cap C = \{a \mid a \in B \wedge a \in C\}.$$

Samtidig har vi ved anvendelse af Ligning (2.2) på mængderne A og $B \cap C$, at

$$A \cup (B \cap C) = \{a \mid a \in A \vee a \in B \cap C\}.$$

Kombineres disse to ligninger og benyttes Ligning 1.8, får vi følgende:

$$
\begin{aligned}
A \cup (B \cap C) &= \{a \mid a \in A \vee (a \in B \wedge a \in C)\}\\
&= \{a \mid (a \in A \vee a \in B) \wedge (a \in A \vee a \in C)\}\\
&= \{a \mid (a \in A \cup B) \wedge (a \in A \cup C)\}\\
&= (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}
$$

□

Sætning 2.1.2 viser, hvordan udsagnslogikken kan benyttes til omskrivning af fællesmængder og foreningsmængder. Herunder følger et eksempel omhandlende forskellen mellem mængder. Her vil Sætningerne 1.3.2 og 1.3.3 komme til nytte.

Eksempel 2.1.7

Lad A, B og C være tre mængder. I dette eksempel ønsker vi at vise, at $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$. Først og fremmest har vi

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \setminus C) &= \{a \mid a \in A \wedge a \in B \setminus C\}\\
&= \{a \mid a \in A \wedge (a \in B \wedge \neg(a \in C))\}.
\end{aligned}
$$

Vi har dog også, at

$$\begin{aligned}
(A\cap B)\setminus(A\cap C) &= \{a \mid a\in A\cap B\wedge\neg(a\in A\cap C)\}\\
&= \{a \mid (a\in A\wedge a\in B)\wedge\neg(a\in A\wedge a\in C)\}\\
&= \{a \mid (a\in A\wedge a\in B)\wedge(\neg(a\in A)\vee\neg(a\in C))\}\\
&= \{a \mid (a\in A\wedge a\in B)\wedge\neg(a\in A) \quad\vee\quad (a\in A\wedge a\in B)\wedge\neg(a\in C)\}\\
&= \{a \mid \mathbf{F} \quad\vee\quad (a\in A\wedge a\in B)\wedge\neg(a\in C)\}\\
&= \{a \mid (a\in A\wedge a\in B)\wedge\neg(a\in C)\}\\
&= \{a \mid a\in A\wedge(a\in B\wedge\neg(a\in C))\}.
\end{aligned}$$

Vi kan konkludere, at $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$ er sandt.

2.2 Funktioner

Et særdeles vigtigt begreb i matematikken er *funktionen*. En funktion f fra A til B, hvor A og B er to givne mængder, tildeler til ethvert $a\in A$ et element $b\in B$. I stedet for formuleringen "f tildeler til a et element b" vil man oftest blot sige "f afbilder a til b". Derfor kaldes en funktion ofte også for en *afbildning*. Et alternativ til "f afbilder a til b" er at sige "f evalueret i a er lig med b".

Mængden A kaldes funktionens *definitionsmængde*, mens mængden B kaldes dens *dispositionsmængde*. Bemærk, at begreberne på engelsk er noget anderledeslydende, nemlig *domain*, henholdsvis *co-domain*. Man benytter typisk den kompakte notationsform $f: A\to B$. Værdien af en funktion f i et specifikt element a betegnes $f(a)$. $f(a)$ kaldes billedet af a ved f, alternativt evalueringen af f i a. At f afbilder værdien a fra A til $f(a)$ kan skrives kort med notationen $a\mapsto f(a)$. Al denne information om en funktion f kan kompakt skrives som følger:

$$\begin{aligned} f: A &\to B\\ a &\mapsto f(a)\end{aligned}$$

For eksempel kan funktionen, der opløfter et reelt tal til anden potens, opskrives som:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto x^2\end{aligned}$$

En funktion som ovenstående gives ofte som $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, hvor $f(x)=x^2$. Ofte siger man dog blot, at funktionen er defineret som $f(x)=x^2$. I sådanne tilfælde overlades det til læseren at finde ud af, hvad definitionsmængden og dispositionsmængden for funktionen er. Så vidt det er muligt, vil vi altid tydeligt angive definitionsmængde og dispositionsmængde for funktioner. Hvis definitionsmængden og dispositionsmængden vælges til at være samme mængde A, kan man definere *identitetsfunktionen* id_A på A. Dette er funktionen $\mathrm{id}_A : A \to A$, således at $a \mapsto a$.

Billedet, også kaldet *værdimængden*, af en funktion $f : A \to B$ er en vigtig betegnelse, der defineres som mængden $\{f(a) \mid a \in A\}$. Billedet af en funktion $f : A \to B$ er en delmængde af dens dispositionsmængde B, og som Eksempel 2.2.1 vil illustrere, er billede og dispositionsmængde ikke nødvendigvis det samme. Typisk notation for billedet af en funktion $f : A \to B$ er $f(A)$ eller $\mathrm{image}(f)$. Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 2.2.1

Lad os igen arbejde på funktionen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Denne funktion har definitionsmængde $\mathbb{R}$ og dispositionsmængde $\mathbb{R}$. Vi påstår nu, at $f(\mathbb{R}) = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$. Med andre ord påstår vi, at $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. På grund af Lemma 2.1.1 er det tilstrækkeligt at vise, at $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ og $\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq f(\mathbb{R})$.

Bemærk først og fremmest, at $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ er sandt, da et reelt tal opløftet i anden potens ikke kan være negativt. Omvendt, hvis $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, så er $\sqrt{r}$ defineret, og $r = (\sqrt{r})^2 = f(\sqrt{r})$. Dette viser, at ethvert ikke-negativt, reelt tal r tilhører billedet af f. Med andre ord har vi vist, at $\mathbb{R}_{\geq 0} \subseteq f(\mathbb{R})$. Ved hjælp af Lemma 2.1.1 kan vi konkludere, at $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Dette eksempel viser, at billedet af en funktion ikke nødvendigvis er lig med dens dispositionsmængde.

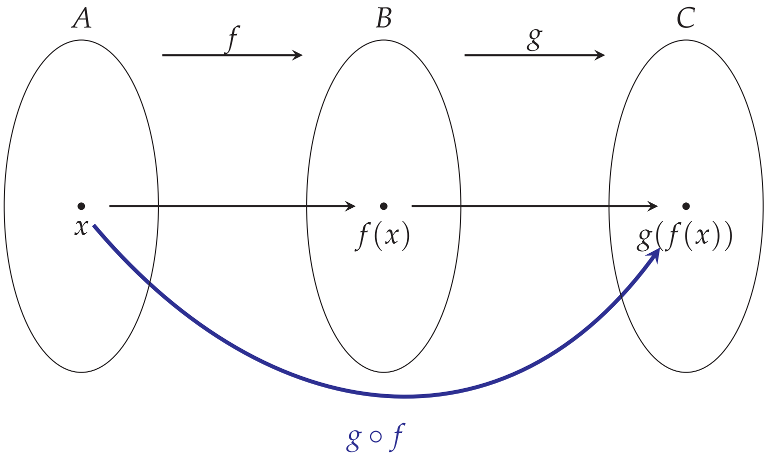
Vi kunne selvfølgelig fra start af have defineret kvadreringsfunktionen, som vi netop har arbejdet på, som $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ med $x \mapsto x^2$. Her er den eneste forskel, at dispositionsmængden er ændret fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}_{\geq 0}$. For denne modificerede funktion er billedet det samme som dispositionsmængden, så hvorfor skelner vi mellem billedet og dispositionsmængden for en funktion i den generelle teori? En grund er, at det er praktisk ikke at skulle holde styr på billedet af en funktion hele tiden. Hvis vi ved, at en funktion afbilder reelle tal til reelle tal, kan vi simpelthen sætte dispositionsmængden lig med $\mathbb{R}$ uden at bekymre os yderligere. For komplicerede funktioner kan det endda være meget svært at beregne billedet.

To funktioner $f : A \to B$ og $g : C \to D$ er ens, netop hvis de har samme definitionsmængde, har samme dispositionsmængde, og tildeler de samme værdier til hvert element i deres definitionsmængder. Opskrevet på formel:

$$f = g \iff A = C \quad \wedge \quad B = D \quad \wedge \quad f(a) = g(a) \text{ for alle } a \in A.$$

Eksempel 2.2.2

Betragt funktionerne



Figur 2.1: Sammensætning af funktionerne $f : A \to B$ og $g : B \to C$

$$\begin{aligned} f : \{0,1\} &\to \{0,1\} \\ a &\mapsto a \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} g : \{0,1\} &\to \{0,1\} \\ a &\mapsto a^2 \end{aligned}$$

Funktionerne f og g har samme definitionsmængde og dispositionsmængde. Desuden er $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, mens $g(0) = 0^2 = 0$ og $g(1) = 1^2 = 1$. Derfor er $f = g$.

Dette eksempel viser, at to funktioner kan være ens, selvom de har forskellige forskrifter.

Hvis to funktioner $f : A \to B$ og $g : B \to C$ er givet, er det muligt at definere funktionen

$$\begin{aligned} h : A &\to C \\ a &\mapsto g(f(a)) \end{aligned}$$

Dispositionsmængden for funktionen f og definitionsmængden for funktionen g skal være de samme i denne definition for at garantere, at $g(f(a))$ altid er defineret: for ethvert $a \in A$ ved vi, at $f(a) \in B$, så det er muligt at benytte elementerne $f(a)$ som input i funktionen g, da definitionsmængden for g er defineret til at være B.

Funktionen $h : A \to C$, der opnås på denne måde, betegnes typisk $g \circ f$ (som udtales g *efter* f) og kaldes sammensætningen af g og f. Derfor har vi $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Eksempel 2.2.3

Lad $\mathbb{R}_{>0}$ betegne mængden af alle positive, reelle tal. Antag, at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ er defineret ved

$f(x) = x^2 + 1$, og at $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ er defineret ved $g(x) = \log_{10}(x)$, hvor $\log_{10}$ betegner logaritmen med grundtal 10. Så er $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktionen, der sender $x \in \mathbb{R}$ til $\log_{10}(x^2 + 1)$. Med andre ord:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_{10}(x^2+1) \end{aligned}$$

For eksempel er $(g \circ f)(3) = \log_{10}(3^2 + 1) = \log_{10}(10) = 1$.

Lemma 2.2.1

Lad A, B, C og D være mængder, og antag, at vi er givet funktionerne $h : A \to B$, $g : B \to C$ og $f : C \to D$. Da har vi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Bevis. Bemærk som det første, at både $(f \circ g) \circ h$ og $f \circ (g \circ h)$ er funktioner fra A til D, så de har samme definitionsmængde og dispositionsmængde. For at bevise lemmaet er det derfor nok at vise, at vi for alle $a \in A$ har $((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ (g \circ h))(a)$. Fra definitionen af sammensætningen $\circ$, har vi

$$(f \circ (g \circ h))(a) = f((g \circ h)(a)) = f(g(h(a))),$$

mens

$$((f \circ g) \circ h)(a) = (f \circ g)(h(a)) = f(g(h(a))).$$

Vi konkluderer, at der for ethvert $a \in A$ gælder, at $(f \circ (g \circ h))(a) = ((f \circ g) \circ h)(a)$, hvilket er det, der skulle vises. $\square$

Resultatet af dette lemma udtrykkes normalt således: sammensætningen af funktioner er en *associativ* operation. Grundet Lemma 2.2.1 vil man typisk forenkle formler, der involverer sammensætningen af flere funktioner, ved at udelade parenteserne. For eksempel skriver man blot $f \circ g \circ h$, når man bestemmer sammensætningen af tre funktioner.

For en given funktion $f : A \to B$ siges funktionen f at være *injektiv*, netop når to forskellige elementer fra A afbildes til forskellige elementer i B. Skrevet med logiske udtryk betyder dette, at:

$f : A \to B$ er injektiv, hvis og kun hvis for alle $a_1, a_2 \in A$, $(a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2))$.

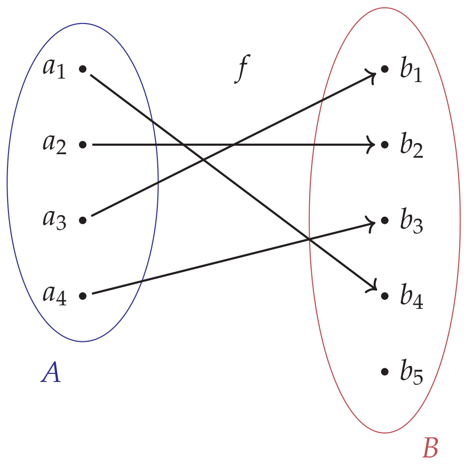
Ligning (1.21) viser, at det er logisk ækvivalent at skrive:

$f : A \to B$ er injektiv, hvis og kun hvis for alle $a_1, a_2 \in A$, $(f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$.

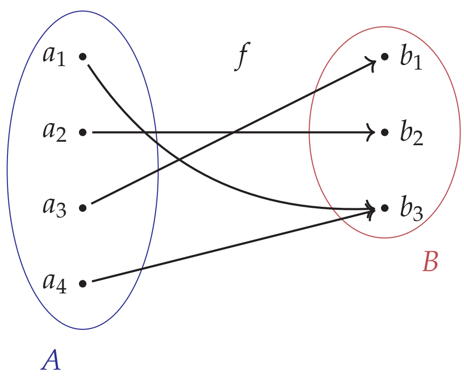
Denne omskrivning kan være praktisk.

En funktion $f : A \to B$ kaldes *surjektiv* , netop når ethvert element i B tilhører billedet af f, det vil sige:

$f : A \to B$ er surjektiv, hvis og kun hvis der for alle $b \in B$ findes et $a \in A$, således at $b = f(a)$.



Figur 2.2: Injektiv funktion $f : A \to B$



Figur 2.3: Surjektiv funktion $f : A \to B$

Ved at benytte notationen $f(A)$ for billedet af f, kan dette kompakt omformuleres til: en funktion $f : A \to B$ kaldes surjektiv, netop når $f(A) = B$.

Eksempel 2.2.4

Et eksempel på en funktion, der er injektiv men ikke surjektiv, er $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = 1/x$. Denne funktion er ikke surjektiv, da dens billede er $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, mens dens dispositionsmængde er $\mathbb{R}$. Den er dog injektiv, da vi ser, at hvis $f(a) = f(b)$, altså hvis $1/a = 1/b$, så er $a = b$.

Et eksempel på en funktion, der er surjektiv men ikke injektiv, er $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ givet ved $g(x) = \sin(x)$. Denne funktion er ikke injektiv, da for eksempel 0 og π indsat i sinusfunktionen begge afbildes i 0.

En funktion $f : A \to B$ kaldes *bijektiv*, hvis den er både injektiv og surjektiv. En bijektiv funktion kaldes også en *bijektion*. Ved at kombinere definitionerne af injektiv og surjektiv ser vi, at funktionen $f : A \to B$ er bijektiv, netop når der for ethvert $b \in B$ findes et unikt $a \in A$, således at $f(a) = b$. I næste afsnit vil vi se flere eksempler på funktioner, men lad os give et eksempel her med det samme.

Eksempel 2.2.5

Betragt funktionen $h : \{0,1,2\} \to \{3,4,5\}$ givet ved $h(x) = 5 - x$. Vi har, at $h(0) = 5$, $h(1) = 4$, og $h(2) = 3$. Derfor findes der for ethvert $b \in \{3,4,5\}$ et unikt $a \in \{0,1,2\}$, således at $h(a) = b$. Vi konkluderer, at h er en bijektiv funktion.

Der findes en ganske praktisk forbindelse mellem bijektive funktioner og det, der kaldes inverse funktioner. Lad os for fuldstændighedens skyld først definere, hvad den inverse af en funktion er.

Definition 2.2.1

Lad $f : A \to B$ være en funktion. En funktion $g : B \to A$ kaldes den *inverse funktion* af f, hvis $f \circ g = \mathrm{id}_B$ (identitetsfunktionen på B) og $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (identitetsfunktionen på A). Den inverse af f betegnes f^{-1}.

Det viser sig, at en funktion har en invers, netop når den er en bijektiv funktion.

Lemma 2.2.2

Antag, at A og B er mængder, og lad $f : A \to B$ være en funktion. Da er f bijektiv, hvis og kun hvis f har en invers funktion.

Bevis. Antag, at $f : A \to B$ er en bijektion. Som vi har set, er en funktion $f : A \to B$ bijektiv, netop hvis der for ethvert $b \in B$ findes et unikt $a \in A$, således at $f(a) = b$. At a skal være unikt medfører, at vi kan definere en funktion $g : B \to A$, hvor $b \mapsto a$. Vi vil vise, at g er den inverse funktion af f. Hvis $b = f(a)$, har vi

$$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b \text{ og } (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = a.$$

Men dette viser, at $f \circ g = \mathrm{id}_B$ og $g \circ f = \mathrm{id}_A$, hvilket ifølge Definition 2.2.1 betyder, at $g = f^{-1}$.

Omvendt, hvis f har en invers funktion, så medfører ligningen $f(a) = b$, at $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b)$. Da $a = (f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$, ser vi, at $a = f^{-1}(b)$. Derfor findes der for ethvert $b \in B$ et unikt element $a \in A$, således at $f(a) = b$ (nemlig $a = f^{-1}(b)$). Dette viser, at f er bijektiv. $\square$

Eksempel 2.2.6

Lad os igen betragte funktionen $h : \{0,1,2\} \to \{3,4,5\}$ givet ved $h(x) = 5 - x$ fra Eksempel 2.2.5. Vi så, at funktionen h er bijektiv. Derfor har den ifølge Lemma 2.2.2 en invers $h^{-1} : \{3,4,5\} \to \{0,1,2\}$. Vi så også, at $h(0) = 5$, $h(1) = 4$, og $h(2) = 3$. Den inverse af h sender billederne tilbage til de oprindelige værdier: $h^{-1}(5) = 0$, $h^{-1}(4) = 1$ og $h^{-1}(3) = 2$.

Bemærk, at de tidligere beregninger faktisk viser, at $h^{-1}(x) = 5 - x$ for alle $x \in \{3, 4, 5\}$. Derfor er $h^{-1} : \{3, 4, 5\} \to \{0, 1, 2\}$ givet ved $h^{-1}(x) = 5 - x$. En lille advarsel: den inverse af en funktion behøver ikke at ligne funktionen selv. Senere vil vi se eksempler på inverse funktioner, hvor dette ikke er tilfældet.

Beregningstekniske aspekter af funktioner

Med vores måde at opfatte en funktion $f : A \to B$ på har vi fuldstændigt ignoreret mere praktiske aspekter så som: hvis du er givet en værdi $a \in A$, hvordan beregner du så rent faktisk $f(a)$? I generel matematisk funktionsteori er dette ikke et problem, og de "indre mekanismer" af funktionen f behandles blot som en sort boks. Men i anvendelser af teorien er det være naturligvis vigtigt at vide, hvordan man beregner funktionsværdier.

Heldigvis kan mange nyttige funktionsberegninger udføres ved hjælp af en *algoritme*. Vi vil ikke gå ind i de præcise detaljer om, hvordan man definerer, hvad en algoritme er, men blot tage udgangspunkt i et intuitivt synspunkt. Grundlæggende er en algoritme et sæt af instruktioner, som man nemt kunne omdanne til et computerprogram, hvis man ville. Disse enkle instruktioner involverer "simple" operationer som multiplikation og addition. Desuden kan mellemliggende resultater gemmes i hukommelsen og benyttes senere i algoritmen, hvis det er nødvendigt. Mere filosofisk åbner algoritmen, som beskriver en funktion f, for den sorte boks og viser dens "indre mekanismer". Lad os se på eksemplet med funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^3$. Et første forsøg på at beskrive en algoritme, der givet et x beregner $f(x)$, kunne være:

Trin 1. Beregn $x \cdot x$, og husk resultatet af denne beregning.

Trin 2. Tag resultatet fra Trin 1, og multiplicér det med x.

Trin 3. Returnér værdien fra Trin 2.

En smule mere formelt kan vi omskrive dette som:

Trin 0. Betegn det givne input ved x.

Trin 1. Beregn $x \cdot x$, og gem resultatet under navnet y.

Trin 2. Beregn $x \cdot y$, og gem resultatet under navnet z.

Trin 3. Returnér z.

Denne beskrivelse kommer til at ligne en egentlig computeralgoritme, når vi opskriver den som såkaldt *pseudo-kode*. Den primære forskel fra ovenstående beskrivelse er, at en sætning som "Beregn $x \cdot x$, og gem resultatet under navnet y" på kompakt form kan skrives som "$y \leftarrow x \cdot x$". Den algoritmiske pseudo-kodebeskrivelse af funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^3$ bliver da:

Algoritme 2 for $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret ved $f(x) = x^3$

```
Input: x ∈ ℝ
y ← x · x
z ← x · y
return z
```

Lad os se på endnu et eksempel.

Eksempel 2.2.7

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ være defineret ved $x \mapsto |x|$. Her betegner $|x|$ absolutværdien af x. Som vi så i Eksempel 1.4.2, har vi, at hvis $x < 0$, så er $|x| = -x$, mens hvis $x \geq 0$, så er $|x| = x$. Af denne grund defineres absolutværdien ofte på følgende måde:

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{hvis } x < 0, \\ x & \text{ellers.} \end{cases}$$

Når man definerer en funktion stykkevist som her, er det vigtigt at sikre sig: 1) at alle elementer i funktionens definitionsmængde optræder i et af stykkerne, og 2) at et element i funktionens definitionsmængde ikke optræder i mere end ét af stykkerne. Her er funktionens definitionsmængde $\mathbb{R}$, hvilket også er foreningmængden af $\mathbb{R}_{<0}$ og $\mathbb{R}_{\geq 0}$, så 1) er opfyldt. Desuden er $\mathbb{R}_{<0}$ og $\mathbb{R}_{\geq 0}$ disjunkte mængder, så 2) er opfyldt. Med andre ord: 1) og 2) er opfyldt, fordi funktionens definitionsmængde $\mathbb{R}$ er den disjunkte forening af $\mathbb{R}_{<0}$ og $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Den givne beskrivelse af funktionen, der udregner absolutværdien, kan let omskrives som en algoritme i pseudo-kode:

Algoritme 3 til udregning af $|x|$ for $x \in \mathbb{R}$

```
Input: x ∈ ℝ
if x < 0 then
    return −x
else
    return x
```

2.3 Eksempler på funktioner

Lad os eksemplificere teorien om funktioner som udviklet ovenfor ved at tage et nærmere kig på nogle elementære funktioner $f : A \to B$, hvor A og B er delmængder af $\mathbb{R}$. For at gøre det nemmere at vise injektivitet af sådanne funktioner benytter vi os af følgende lemma:

Lemma 2.3.1

Lad $f : A \to B$ være en funktion, og antag, at A og B er delmængder af $\mathbb{R}$. Antag enten, at

$$\text{det for alle } a_1, a_2 \in A \text{ gælder, at: } a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2) \tag{2.12}$$

eller, at

$$\text{det for alle } a_1, a_2 \in A \text{ gælder, at: } a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) > f(a_2). \tag{2.13}$$

Så er f en injektiv funktion.

Bevis. Antag at funktionen f opfylder Ligning (2.12). Lad a_1 og a_2 være forskellige elementer i A. Da $a_1 \neq a_2$, ved vi, at vi har enten $a_1 < a_2$ eller $a_2 < a_1$. Hvis $a_1 < a_2$, medfører Ligning (2.12), at $f(a_1) < f(a_2)$. Hvis $a_2 < a_1$, medfører Ligning (2.12), at $f(a_2) < f(a_1)$. I begge tilfælde kan vi konkludere, at $f(a_1) \neq f(a_2)$. Derfor er f injektiv. Hvis funktionen f opfylder Ligning (2.13), viser et lignende ræsonnement, at f er injektiv. □

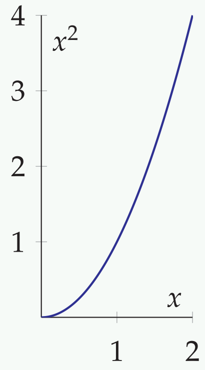
En funktion f, der opfylder Ligning (2.12) eller Ligning (2.13), kaldes *strengt monoton*. Mere præcist kaldes en funktion f, der opfylder Ligning (2.12), *strengt voksende*, mens en funktion f, der opfylder Ligning (2.13), kaldes *strengt aftagende*. Derfor kan Lemma 2.3.1 opsummeres som: en strengt monoton funktion er injektiv.

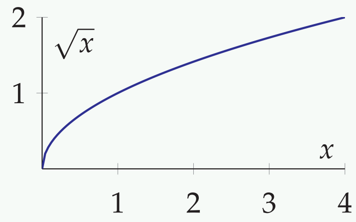
Eksempel 2.3.1

Overvej funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, hvor $f(x) = x^2$. Vi har allerede set i Eksempel 2.2.1, at billedet af denne funktion er lig med $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Med andre ord, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Funktionen f er derfor ikke surjektiv. Faktisk er den heller ikke injektiv, da for eksempel $f(-1) = 1$, og $f(1) = 1$.

Da funktionen f ikke er bijektiv, har den ikke en invers. Vi kan forsøge at ændre definitionsmængden og dispositionsmængden for f, så vi opnår en ny funktion, der er bijektiv. Først og fremmest kan vi opstille en funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ defineret ved $g(x) = x^2$. Forskellen mellem funktionerne f og g er ikke stor: kun deres dispositionsmængder er forskellige. Selvom det for ethvert reelt tal x er sandt, at $f(x) = g(x)$, betragter vi derfor alligevel funktionerne f og g som to forskellige funktioner. Vi introducerer funktionen g af den grund, at g er surjektiv, da $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0}$, og $\mathbb{R}_{\geq 0}$ er dispositionsmængden for g. Men g har stadig ikke en invers, da g ikke er injektiv, ligesom at f ikke er injektiv af denne grund. Vi har stadig for eksempel, at $g(1) = 1$ og $g(-1) = 1$. Vi vil nu introducere endnu en funktion $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ defineret ved $h(x) = x^2$. Funktionen h har samme dispositionsmængde som funktionen g, men bemærk, at definitionsmængden for funktionen h er en delmængde af definitionsmængden for g. Faktisk har h definitionsmængden $\mathbb{R}_{\geq 0}$, hvilket er en skarp delmængde af $\mathbb{R}$, som er definitionsmængden for g. Nu kan man vise, at funktionen h er strengt monoton og derfor jævnfør Lemma 2.3.1 injektiv. Vi har allerede set, at h er surjektiv, så vi kan konkludere, at den er bijektiv. Jævnfør Lemma 2.2.2 har funktionen h derfor en invers. Da der for ethvert $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gælder, at $\sqrt{x^2} = x$ og $(\sqrt{x})^2 = x$, er den inverse af h funktionen $h^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ defineret ved $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

For at illustrere situationen har vi plottet (dele af) graferne for funktionen h samt dens inverse h^{-1}. Bemærk, at grafen for h^{-1} er spejlbilledet af grafen for h henover linjen $y = x$. Grafen for h illustrerer desuden, at der er tale om en strengt voksende funktion.

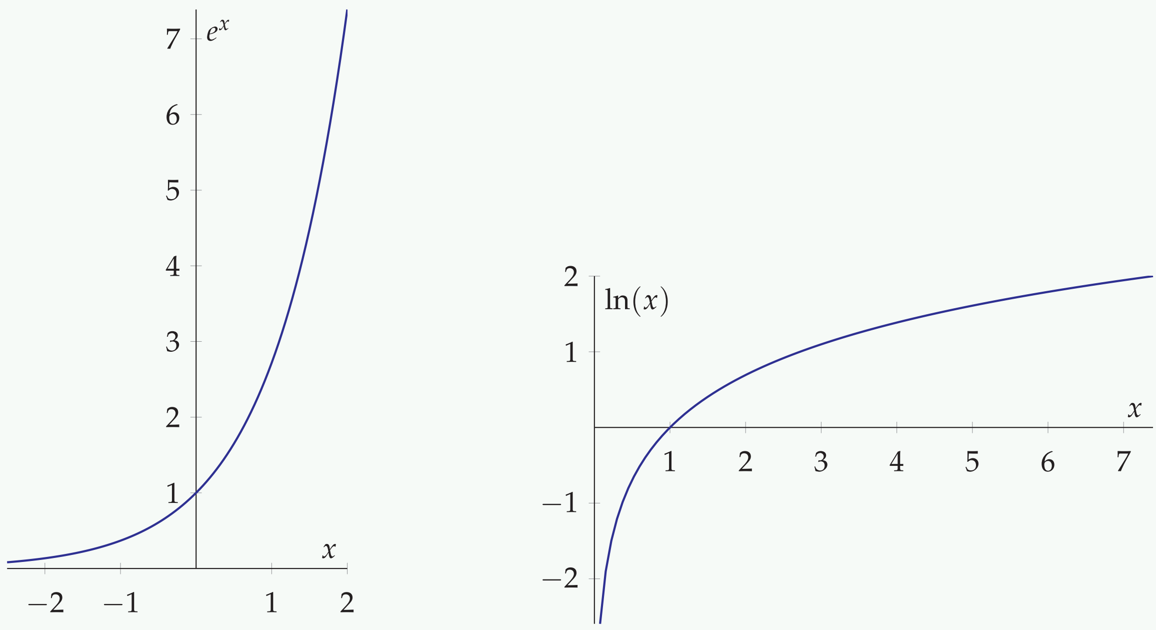




Eksempel 2.3.2

Lad e betegne grundtallet for den naturlige logaritme. Konstanten e kaldes ofte Eulers tal og er omtrent lig med 2.71828. Eksponentialfunktionen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ er defineret ved $x \mapsto e^x$. Denne er en strengt voksende funktion og er derfor injektiv. Desuden er billedet af eksponentialfunktionen $\mathbb{R}_{>0}$, hvilket medfører, at den er surjektiv. Ved at kombinere disse observationer konkluderer vi, at exp er en bijektiv funktion. Dens inverse betegnes $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$. Særligt har vi, at $\ln(e^x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$, samt $e^{\ln(x)} = x$ for alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

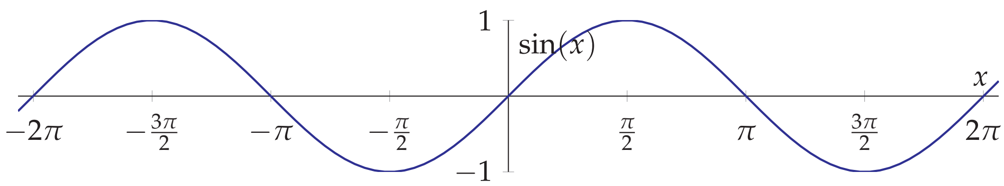
Vi plotter graferne for funktionerne exp og ln for at illustrere situationen.



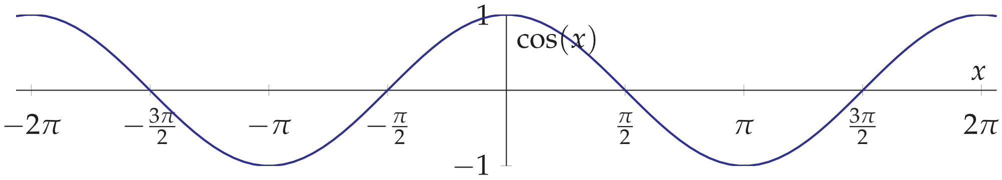
De trigonometriske funktioner $\sin$, $\cos$ og $\tan$.

De *trigonometriske funktioner* sinus, cosinus og tangens er ekstremt nyttige eksempler på funktioner og vil dukke op i mange forskellige sammenhænge senere hen. Derfor genbesøger vi dem kort i dette afsnit.

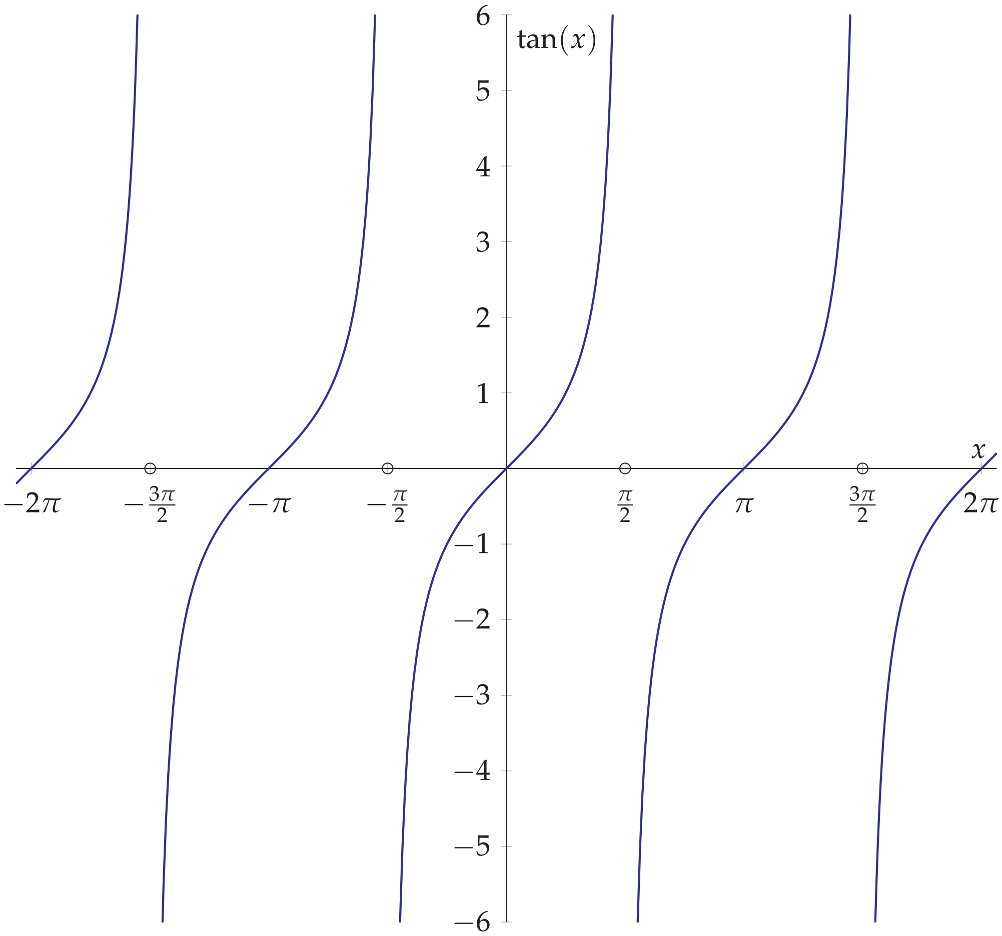
Sinusfunktionen betegnes normalt $\sin$, og lad os i lyset af vores tilgang til funktionsdefinitioner i dette kapitel udspecificere dens definitionsmængde og dispositionsmængde. Vi definerer sinusfunktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ som den funktion, der opfylder, at $x \mapsto \sin(x)$. Billedet af $\sin$ er $[-1, 1]$, hvilket betyder, at $\sin$ er en surjektiv funktion. Den er ikke en injektiv funktion, da forskellige reelle tal kan have samme funktionsværdi. For eksempel har man $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$. Grafen for sinusfunktionen er som følger:



Ligeledes definerer vi $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Igen er dispositionsmængden valgt som det lukkede interval $[-1, 1]$, hvilket betyder, at funktionen $\cos$ er surjektiv. Den er dog ikke injektiv, da for eksempel $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$. Grafen for cosinusfunktionen er:



En tredje ofte benyttet trigonometrisk funktion er tangensfunktionen. Løst sagt har vi sammenhængen $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$, men denne formel giver kun mening for $x \in \mathbb{R}$, der opfylder $\cos(x) \neq 0$. Derfor kan vi definere $\tan : \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$, hvor $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$. Da $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\}$ og $\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \{\dots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots\}$, er definitionsmængden for tangensfunktionen mængden $\mathbb{R} \setminus \{\dots, -3\pi/2, -\pi/2, \pi/2, 3\pi/2, \dots\}$. Grafen for tangensfunktionen er som følger:

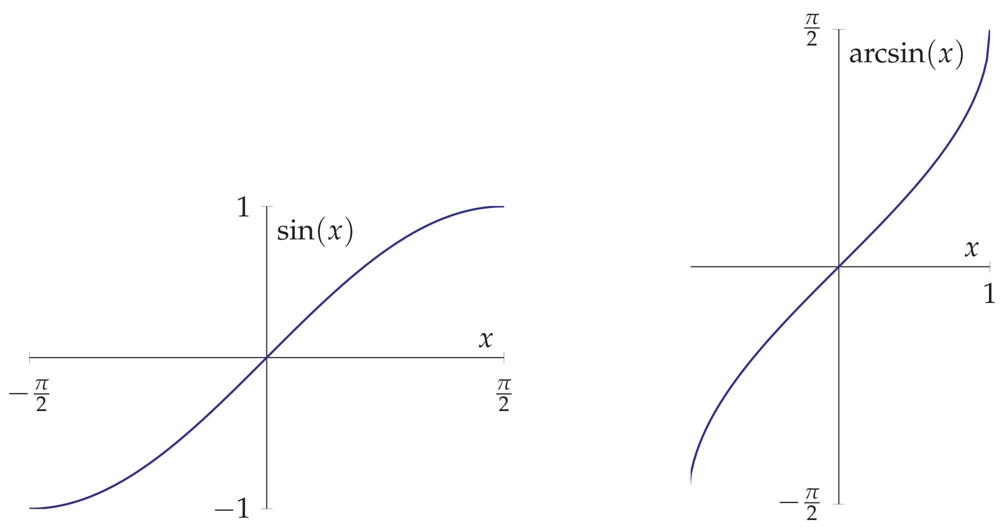


De små cirkler på x-aksen indikerer de værdier af x, for hvilke tangensfunktionen ikke er defineret. Tangensfunktionen er surjektiv, da dens billede er $\mathbb{R}$. Ligesom sinus- og cosinusfunktionerne er den ikke injektiv. Vi har for eksempel $\tan(0) = 0$ og også $\tan(\pi) = 0$.

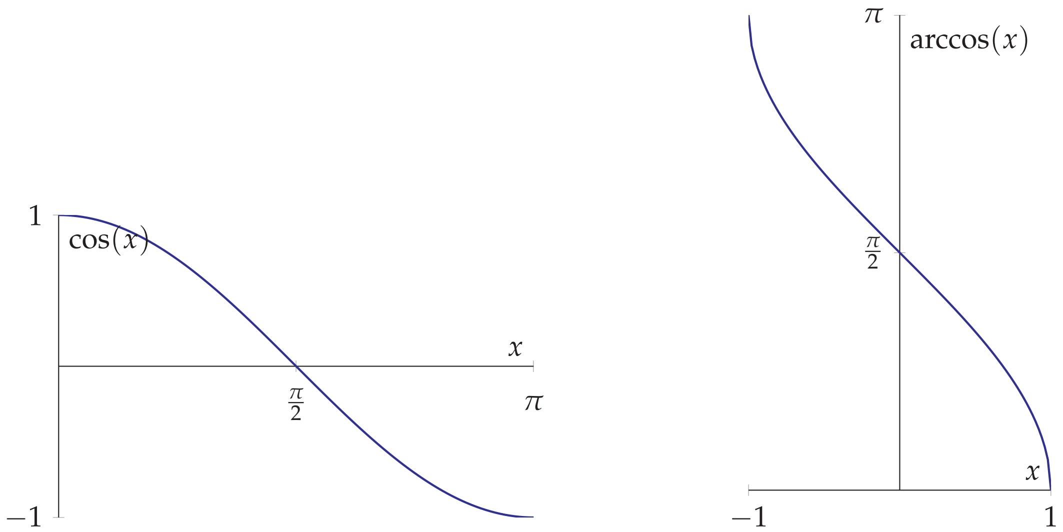
De inverse trigonometriske funktioner

Da ingen af de trigonometriske funktioner sin, cos og tan, der blev diskuteret i foregående afsnit, er bijektioner, kan vi ikke finde inverse til disse funktioner. Men som i Eksempel 2.3.1 kan vi justere definitionsmængden for disse funktioner og derved opnå tilsvarende funktioner, der har en invers. Disse inverse kendes som de *inverse trigonometriske funktioner* (nogle gange også kaldet arcusfunktionerne). I dette afsnit ser vi nærmere på detaljerne bag, hvordan disse er defineret.

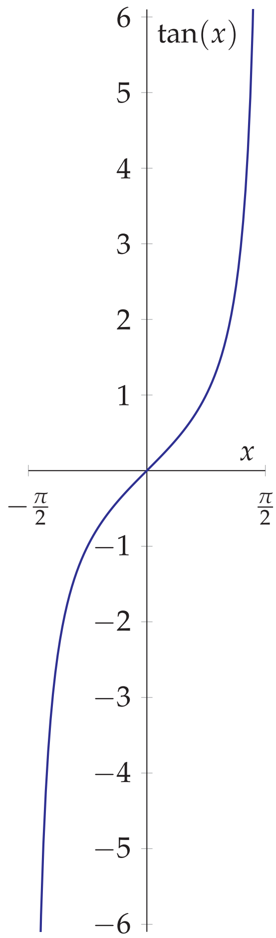
Hvis definitionsmængden for funktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ afgrænses til det lukkede interval $[-\pi/2, \pi/2]$, opnås funktionen $f : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ defineret ved $f(x) = \sin(x)$. Funktionen f er en bijektiv funktion, da grafen for sinusfunktionen er strengt voksende på intervallet $[-\pi/2, \pi/2]$ med værdier fra -1 til 1. Den inverse af denne funktion kaldes *arcsinus* og betegnes typisk arcsin i matematiske formler. Derfor er $\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ den inverse af sinusfunktionen, hvis definitionsmængde er begrænset til $[-\pi/2, \pi/2]$. Graferne for disse to funktioner ser således ud:

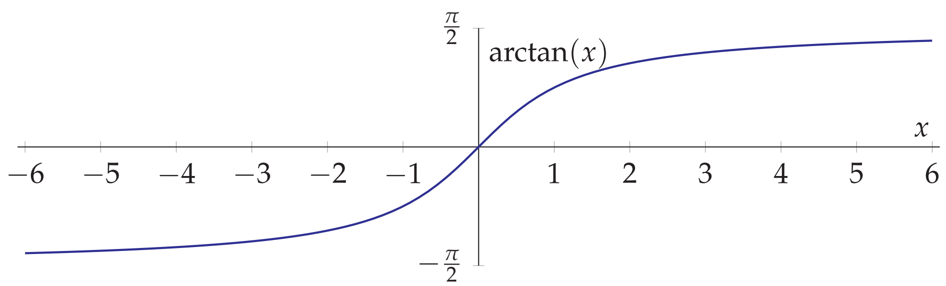


På tilsvarende måde kan vi definere *arccosinus*-funktionen. Først afgrænser vi definitionsmængden for den sædvanlige cosinusfunktion til det lukkede interval $[0, \pi]$. Den resulterende funktion $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$, hvor $g(x) = \cos(x)$, er strengt aftagende samt surjektiv og dermed bijektiv. Den inverse af g er arccosinusfunktionen. Den betegnes typisk ved arccos. Derfor er $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ den inverse af cosinusfunktionen, når dens definitionsmængde er begrænset til $[0, \pi]$. Vi illustrerer situationen ved at vise graferne for disse to funktioner.



Slutteligt behandler vi tangensfunktionen i detaljer. Her kan vi overveje funktionen $h :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$, hvor $h(x) = \tan(x)$. Med andre ord er funktionen h simpelthen tangensfunktionen med sin definitionsmængde afgrænset til det åbne interval $]-\pi/2, \pi/2[$. Funktionen h er en strengt voksende funktion med billedet $\mathbb{R}$, hvilket medfører, at h er en bijektion. Den inverse af h kaldes *arctangens*-funktionen, typisk betegnet arctan. Mere præcist er $\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$ den inverse af tangensfunktionen, hvis definitionsmængde er begrænset til $]-\pi/2, \pi/2[$. Som før illustrerer vi situationen ved at vise graferne for disse funktioner.





Eksempel 2.3.3

Lad os beregne nogle værdier af de inverse trigonometriske funktioner. Da $\sin(0) = 0$, har vi $\arcsin(0) = 0$. Men selvom $\sin(\pi) = 0$, har vi ikke $\arcsin(0) = \pi$. En funktion må slet ikke kunne opnå to forskellige værdier for den samme inputværdi! Problemet er, at arcsin er den inverse af sinusfunktionen med definitionsmængden begrænset til $[-\pi/2, \pi/2]$. Derfor medfører $\sin(x) = y$ kun $\arcsin(y) = x$, så længe $x \in [-\pi/2, \pi/2]$. For eksempel, da $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, har vi $\arcsin(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

For arccos har vi et lignende fænomen. Man har $\cos(-\pi/4) = \sqrt{2}/2$, men dette medfører ikke $\arccos(\sqrt{2}/2) = -\pi/4$. Denne gang er problemet, at definitionsmængden for cosinusfunktionen blev begrænset til $[0, \pi]$, da arccos-funktionen blev defineret. På intervallet $[0, \pi]$ antager cosinusfunktionen ganske vist værdien $\sqrt{2}/2$, men for $x = \pi/4$. Derfor er $\arccos(\sqrt{2}/2) = \pi/4$.

Som et sidste eksempel har vi $\cos(\pi/3) = 1/2$ og $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Derfor er $\tan(\pi/3) = \sin(\pi/3)/\cos(\pi/3) = \sqrt{3}$. arctan-funktionen er den inverse af tangensfunktionen med sin definitionsmængde begrænset til $]-\pi/2, \pi/2[$. Da $\pi/3 \in]-\pi/2, \pi/2[$, kan vi derfor konkludere, at $\arctan(\sqrt{3}) = \pi/3$.