Kapitel 3

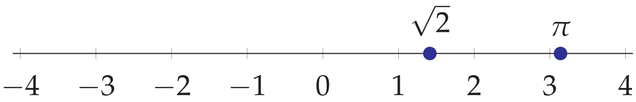
Komplekse tal

3.1 Introduktion til de komplekse tal

I dette kapitel introducerer vi mængden af *komplekse tal*, almindeligvis betegnet $\mathbb{C}$. De komplekse tal viser sig ekstremt nyttige, og ingen forsker eller ingeniør kan undvære dem i den moderne videnskab. Lad os først tage et kort kig på nogle andre talmængder i matematikken. De naturlige tal $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ har, som deres navn antyder, en meget naturlig fortolkning: de dukker op, når man vil tælle ting. Heltallene $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ kom frem, da forskelle mellem naturlige tal skulle beskrives. I Eksempel 2.1.4 så vi desuden mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ bestående af brøker af heltal.

Man kunne få den tanke, at mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ indeholder alle de tal, man nogensinde ville kunne få brug for, men det er ikke tilfældet. For eksempel viser det sig, at ligningen $z^2 = 2$ ikke har en løsning i $\mathbb{Q}$. I stedet for blot at acceptere, at en sådan ligning ikke har nogen løsninger, udvidede matematikere mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ til mængden af reelle tal $\mathbb{R}$. Inden for $\mathbb{R}$ har ligningen $z^2 = 2$ to løsninger, nemlig $\sqrt{2}$ og $-\sqrt{2}$. Mængden $\mathbb{R}$ er meget stor og indeholder mange interessante tal, såsom e, grundlaget for den naturlige logaritme, og π. Ofte repræsenteres de reelle tal $\mathbb{R}$ som en ret linje, som vi vil kalde *den reelle tallinje*. Ethvert punkt på den reelle tallinje repræsenterer et reelt tal (se Figur 3.1).

Figur 3.1: Den reelle tallinje.



Igen havde man i nogen tid den tanke, at mængden af reelle tal $\mathbb{R}$ må indeholde alle tal, man nogensinde ville kunne få brug for. Men hvad med en ligning som $z^2 = -1$? Indenfor mængden af reelle tal har denne ligning tydeligvis ingen løsninger. Vi er havnet i samme situation som tidligere med ligningen $z^2 = 2$, fra før de reelle tal blev introduceret. Lad os derfor forsøge at finde frem til en mængde af tal, der er endnu større end $\mathbb{R}$, og som indeholder en løsning til ligningen $z^2 = -1$. En umiddelbar tanke vil være at tillade $\sqrt{-1}$ som en løsning til $z^2 = -1$. Oftest benyttes dog i stedet symbolet i. Derfor ønsker vi, at $i^2 = -1$. Med dette in mente definerer vi nu de komplekse tal som følger.

Definition 3.1.1

Mængden $\mathbb{C}$ af komplekse tal defineres som:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Det komplekse tal i opfylder reglen

$$i^2 = -1.$$

Udtrykket $a + bi$ skal blot opfattes som et polynomium i variablen i. Derfor gælder der for eksempel, at $a + bi = a + ib$. Det gør heller ingen forskel at skrive $a + b \cdot i$ fremfor $a + bi$. Dermed har vi for alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a + bi = a + b \cdot i = a + i \cdot b = a + ib.$$

Slutteligt betegner $a + bi$ nøjagtigt det samme komplekse tal som $bi + a$, præcis som vi ville behandle polynomier.

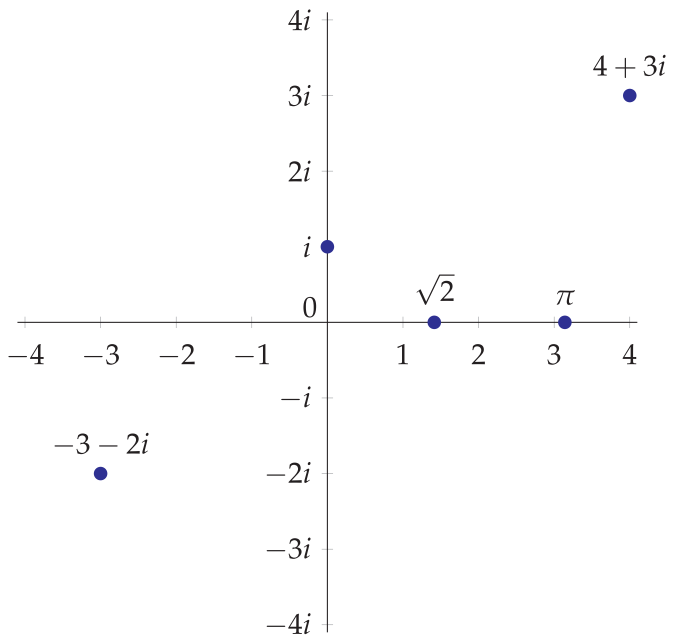
For ethvert $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ er de to komplekse tal $a + bi$ og $c + di$ ens, hvis og kun hvis $a = c$, og $b = d$. Hvis $a = 0$, vil man typisk reducere $0 + bi$ til bi, altså $0 + bi = bi$. Ligeledes, hvis $b = 0$, skriver man typisk a i stedet for $a + 0i$. Endelig, hvis $b = 1$, udelades ofte 1 foran i. For eksempel er $5 + 1i = 5 + i$. Med alle disse notationsrettelinjer på plads har vi for eksempel, at $i = 1i = 0 + 1i = 0 + 1 \cdot i$. Mængden af komplekse tal $\mathbb{C}$ indeholder mængden af reelle tal $\mathbb{R}$, da vi for $a \in \mathbb{R}$ har $a = a + 0i$. Med andre ord: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Vi har endda $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, da $i \in \mathbb{C}$, mens $i \notin \mathbb{R}$.

De komplekse tal kan repræsenteres grafisk, men denne gang som et talplan, der kaldes *det komplekse talplan*. Et komplekst tal $a + bi$ repræsenteres af punktet (a, b) i dette talplan. Dette betyder, at tallet i har koordinaterne $(0, 1)$ og derfor vil ligge på andenaksen. Tallet i samt andre eksempler på komplekse tal er indtegnet i det komplekse talplan i Figur 3.2.

Akserne i det komplekse talplan gives særlige navne. Den vandrette akse kaldes *den reelle akse* eller blot *realaksen*, da alle reelle tal ligger på den. Faktisk vil et tal på den reelle akse i det komplekse talplan være på formen $a + 0i$ for ethvert $a \in \mathbb{R}$.

Den lodrette akse kaldes *den imaginære akse* eller blot *imaginæraksen*. Symbolet i er en forkortelse for ordet imaginær. De tal, der ligger på den lodrette akse, kaldes *rent imaginære tal*. Udtrykkene “komplekse tal” og “imaginære tal” er historiske og antyder, at videnskabsfolk har kæmpet med at forstå disse tal. I dag er de komplekse tal helt standard.

Figur 3.2: Det komplekse talplan.



Koordinaterne for et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$ i det komplekse talplan tildeles ligeledes særlige navne. Førstekoordinaten kaldes *realdelen* af z (betegnet $\mathrm{Re}(z)$), mens z's andenkoordinat kaldes *imaginærdelen* (betegnet $\mathrm{Im}(z)$). Hvis man kender $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$, kan man opskrive tallet z, da der gælder, at

$$z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i.$$

Hvis et komplekst tal z er skrevet på formen $\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$, siges tallet z at være på *rektangulær form*. For et givet komplekst tal z kaldes talparret $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ for z's *rektangulære koordinater*.

Eksempel 3.1.1

Udregn de følgende komplekse tals rektangulære koordinater:

(a) $2 + 3i$

(b) $\sqrt{2}$

(c) i

Svar:

(a) Tallet $2 + 3i$ er på rektangulær form. Derfor kan vi aflæse real- og imaginærdelen direkte. Vi har $\mathrm{Re}(2 + 3i) = 2$ og $\mathrm{Im}(2 + 3i) = 3$. Derfor har det komplekse tal $2 + 3i$ de rektangulære koordinater $(2, 3)$.

(b) Tallet $\sqrt{2}$ er et reelt tal, men vi kan betragte det som et komplekst tal, da $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$. Heraf ser vi, at $\text{Re}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, og $\text{Im}(\sqrt{2}) = 0$. Alle reelle tal har en imaginærdel lig med 0. De rektangulære koordinater for $\sqrt{2}$ er $(\sqrt{2}, 0)$.

(c) Tallet i er et rent imaginært tal, og man kunne også skrive $i = 0 + 1 \cdot i$. Derfor har vi $\text{Re}(i) = 0$ og $\text{Im}(i) = 1$. Alle rent imaginære tal har realdelen 0. De rektangulære koordinater for i er $(0, 1)$.

3.2 Aritmetik med komplekse tal

Nu hvor vi har introduceret de komplekse tal, kan vi begynde vores undersøgelse af deres struktur. Vi er vant til at kunne lægge to tal sammen, trække dem fra hinanden, gange dem sammen og dividere dem med hinanden. Det er endnu ikke klart, om sådanne operationer kan udføres med komplekse tal, men som vi vil se nu, er det naturligvis muligt.

Vi starter med at definere addition og subtraktion.

Definition 3.2.1

Lad $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, og lad $a + bi$ og $c + di$ være to komplekse tal i $\mathbb{C}$ skrevet på rektangulær form. Da definerer vi:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

og

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Addition eller subtraktion af to komplekse tal er meget lig addition eller subtraktion af to polynomier af grad ét (polynomier defineres mere præcist i Definition **??**). Man samler simpelthen de led, der ikke involverer i, og de led, der involverer i. Man kan derfor nemt huske, hvordan addition skal udføres, ved at tilføje et mellemliggende trin som følgende:

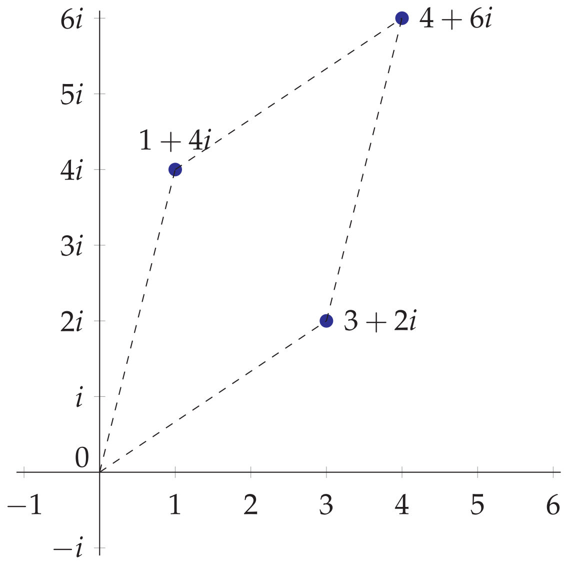
$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= a + bi + c + di \\ &= a + c + bi + di \\ &= (a + c) + (b + d)i.\end{aligned}$$

Subtraktion kan forklares på en tilsvarende måde. Grafisk er addition af komplekse tal meget lig addition af to vektorer i planet, se Figur 3.3. Bemærk, at $(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$. Når flere komplekse tal lægges sammen, betyder rækkefølgen, hvori man lægger disse tal sammen, derfor ikke noget.

Eksempel 3.2.1

Reducér følgende udtryk, og opskriv resultaterne på rektangulær form.

Figur 3.3: Addition af komplekse tal. Det er her illustreret grafisk, at $(3+2i)+(1+4i)=4+6i$.



(a) $(3+2i)+(1+4i)$

(b) $(3+2i)-(1+4i)$

(c) $(5-7i)-i$

(d) $(5-7i)-(-10+i)$

Svar:

(a) $(3+2i)+(1+4i)=(3+1)+(2+4)i=4+6i$

(b) $(3+2i)-(1+4i)=(3-1)+(2-4)i=2-2i$

(c) $(5-7i)-i=5+(-7-1)i=5-8i$

(d) $(5-7i)-(-10+i)=(5-(-10))+(-7-1)i=15-8i$

Nu hvor vi har addition og subtraktion af komplekse tal på plads, tager vi et kig på deres multiplikation. Antag for eksempel, at vi vil multiplicere de komplekse tal $a+bi$ og $c+di$, hvorom der som sædvanlig gælder $a,b,c,d \in \mathbb{R}$. Lad os se, hvad der sker, hvis vi bare ganger disse udtryk sammen, mens de opfattes som polynomier i variablen i:

$$(a+bi)\cdot(c+di)=a\cdot(c+di)+bi\cdot(c+di)=a\cdot c+a\cdot d\,i+b\cdot c\,i+b\cdot d\,i^2.$$

Det eneste, vi har gjort indtil nu, er at reducere produktet for at slippe af med parenteserne. For at komme videre skal vi nu huske på, at hele pointen med at introducere i var, at det er en løsning til ligningen $z^2 = -1$. Derfor er $i^2 = -1$. Benyttes dette, fås

$$(a+bi)\cdot(c+di) = a\cdot c + a\cdot di + b\cdot ci + b\cdot d\cdot(-1) = (a\cdot c - b\cdot d) + (a\cdot d + b\cdot c)i.$$

Vi ender igen med et komplekst tal! Alt vi havde brug for, var de sædvanlige regneregler (for at slippe af med parenteserne) samt formlen $i^2 = -1$. Lad os derfor ophøje den formel, vi netop har fundet frem til, som den formelle definition af multiplikation af komplekse tal.

Definition 3.2.2

Lad $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, og lad $a + bi$ og $c + di$ være to komplekse tal i $\mathbb{C}$ givet på rektangulær form. Vi definerer:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (a\cdot c - b\cdot d) + (b\cdot c + a\cdot d)i.$$

Der er ingen grund til at huske ovenstående definition udenad. Udregning af et produkt af to komplekse tal på rektangulær form kræver blot, at vi husker, hvordan vi opnåede formlen: vi reducerede produktet ved at gange alle led ud og derefter benytte, at $i^2 = -1$. Bemærk, at $(a+bi)\cdot(c+di) = (c+di)\cdot(a+bi)$, så rækkefølgen af de komplekse tal betyder ikke noget i multiplikation. Man siger, at multiplikation af komplekse tal er *kommutativ*. Vi vil se i Afsnit 3.3, at multiplikationen af to komplekse tal også kan beskrives geometrisk.

Eksempel 3.2.2

Reducér følgende udtryk, og opskriv resultaterne på rektangulær form.

(a) $(1+2i)\cdot(3+4i)$

(b) $(4+i)\cdot(4-i)$

Svar:

(a)

$$\begin{aligned}(1+2i)(3+4i) &= 1\cdot 3 + 1\cdot 4i + 2i\cdot 3 + 2i\cdot 4i\\ &= 3 + 4i + 6i + 8i^2\\ &= 3 + 10i - 8\\ &= -5 + 10i.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(4+i)\cdot(4-i) &= 4\cdot 4 + 4\cdot(-i) + i\cdot 4 - i^2\\ &= 16 - 4i + 4i - (-1)\\ &= 17 + 0i\\ &= 17.\end{aligned}$$

I dette tilfælde er resultatet et reelt tal.

Del to af dette eksempel viser, at produktet af to ikke-reelle tal godt kan blive et reelt tal, og eksemplet er et særtilfælde af følgende lemma:

Lemma 3.2.1
Lad $a, b \in \mathbb{R}$, og lad $z = a + bi$ være et komplekst tal på rektangulær form. Da gælder der, at

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

Bevis. Vi har

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (a - bi) &= a \cdot a + a \cdot (-bi) + (bi) \cdot a - b \cdot bi^2 \\ &= a^2 - abi + abi - b^2 \cdot (-1) \\ &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

□

Motiveret af dette lemma introducerer vi følgende:

Definition 3.2.3
Lad $z \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal og $z = a + bi$ dets rektangulære form. Da defineres den komplekst konjugerede af z som $\bar{z} = a - bi$. Funktionen fra $\mathbb{C}$ til $\mathbb{C}$ defineret ved $z \mapsto \bar{z}$ kaldes *kompleks konjugering*.

Bemærk, at vi direkte af denne definition ser, at $\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z)$. Derfor er

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i.$$

Dermed medfører Lemma 3.2.1, at

$$z \cdot \bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2. \tag{3.1}$$

Bemærk, at denne ligning medfører, at produktet $z \cdot \bar{z}$ for ethvert $z \in \mathbb{C}$ er et reelt tal.

Kompleks konjugering viser sig at være nyttig, når division af komplekse tal skal defineres. Vi vil gerne kunne dividere ethvert komplekst tal med ethvert komplekst tal udover nul. Bemærk, at vi allerede er i stand til at dividere et komplekst tal $a + bi \in \mathbb{C}$ med et reelt tal $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, så længe det ikke er nul, ved at definere:

$$\frac{a + bi}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}i \quad a, b \in \mathbb{R} \text{ og } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

For at kunne dividere ethvert komplekst tal $z_1 = a + bi$ med ethvert komplekst tal $z_2 = c + di$, der ikke er nul, kan vi udnytte et trick ved at observere følgende:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{c^2 + d^2}. \tag{3.2}$$

Tælleren på højresiden af denne ligning er blot et produkt af to komplekse tal, hvilket vi allerede er i stand til at håndtere. Nævneren er et reelt tal, der ikke er nul, nemlig $c^2 + d^2$, og vi ved også nu, hvordan vi dividerer et komplekst tal med et sådant reelt tal. Lad os sikre os, at nævneren $c^2 + d^2$ ganske rigtigt er et reelt tal men ikke nul. For det første er det et reelt tal, fordi c og d er reelle tal. For det andet kan et reelt tal opløftet i anden ikke blive negativt, altså $c^2 \geq 0$, og $d^2 \geq 0$. Den eneste måde, hvorpå $c^2 + d^2 = 0$ kan blive opfyldt, er derfor, hvis både $c^2 = 0$, og $d^2 = 0$. Men så er $c = 0$ og $d = 0$, hvilket medfører, at $c + di = 0$, i modstrid med vores antagelse om, at vi dividerer med et komplekst tal, der ikke er nul.

Fremgangsmåden i division af et komplekst tal med et komplekst tal er altså, at hvis $z_1 \in \mathbb{C}$, og $z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, så kan z_1/z_2 udføres, hvis både tæller og nævner multipliceres med den komplekst konjugerede af z_2, da nævneren så bliver $z_2 \cdot \overline{z_2}$, hvilket er et reelt tal. Ligning (3.2) giver os derfor mulighed for at dividere med komplekse tal, der ikke er nul. Et særtilfælde af Ligning (3.2) er følgende:

$$\frac{1}{c+di} = \frac{1}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i. \tag{3.3}$$

Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 3.2.3

Reducér følgende udtryk, og skriv resultaterne på rektangulær form.

(a) $1/(1+i)$

(b) $\dfrac{1+2i}{3+4i}$

Svar:

(a) Bemærk, at $1/(1+i)$ bare er en anden måde at skrive $\frac{1}{1+i}$ på. Derfor får vi ved brug af Ligning (3.2), eller alternativt Ligning (3.3):

$$1/(1+i) = \frac{1 \cdot (1-i)}{(1+i)\cdot(1-i)} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

(b) Ved hjælp af Ligning (3.2) får vi

$$\begin{aligned} \frac{1+2i}{3+4i} &= \frac{(1+2i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{3^2+4^2} \\ &= \frac{3+2i+8}{9+16} = \frac{11+2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i. \end{aligned}$$

Lad os samle nogle forskellige egenskaber for multiplikation og addition i en sætning. Vi vil ikke bevise sætningen; flere af udsagnene er faktisk allerede vist i det foregående.

Sætning 3.2.2

Lad $\mathbb{C}$ være mængden af komplekse tal, og lad $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ være valgt vilkårligt. Da er følgende egenskaber opfyldt:

(i) Addition og multiplikation er *associative*: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ og $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$.

(ii) Addition og multiplikation er *kommutative*: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ og $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

(iii) Der gælder *distributivitet* af multiplikation over addition: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

Yderligere har man for komplekse tal, ligesom for de reelle tal, følgende egenskaber:

Sætning 3.2.3

(i) Addition og multiplikation har et neutralt element: elementerne 0 og 1 i $\mathbb{C}$ opfylder $z + 0 = z$ og $z \cdot 1 = z$ for alle $z \in \mathbb{C}$.

(ii) Additivt inverse eksisterer: for ethvert $z \in \mathbb{C}$ findes der et element i $\mathbb{C}$, betegnet $-z$, kaldet den additivt inverse af z, således at $z + (-z) = 0$.

(iii) Multiplikativt inverse eksisterer: for ethvert $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ findes der et element i $\mathbb{C}$, betegnet z^{-1} eller $1/z$, kaldet den multiplikativt inverse af z, således at $z \cdot z^{-1} = 1$.

Bemærk, at punkt to og tre i Sætning 3.2.3 garanterer eksistensen af additivt og multiplikativt inverse. Det angives dog ikke, hvordan man bestemmer disse inverse. Men faktisk har vi allerede set, hvordan man kan bestemme dem. Vi opstiller i følgende eksempel regnemetoden algoritmisk ved at nedskrive den præcise metodik til beregning af $-z$ og $1/z$ i pseudo-kode:

Eksempel 3.2.4

En mulig algoritme, der udregner $-z$ for et givet komplekst tal z, kan beskrives som følger: Begynd ved at skrive z på rektangulær form, altså find $a, b \in \mathbb{R}$, således at $z = a + bi$. Derefter er $-z = -a - bi$. I pseudo-kode:

Algoritme 4 til udregning af "den additivt inverse af $z \in \mathbb{C}$".

Input: $z \in \mathbb{C}$
1: $a \leftarrow \mathrm{Re}(z)$
2: $b \leftarrow \mathrm{Im}(z)$
3: **return** $-a - bi$

For at udregne $1/z$ gør vi brug af Ligning (3.3). Bemærk, at $1/z$ ikke eksisterer, hvis $z = 0$. Derfor tjekker algoritmen først, om $z = 0$.

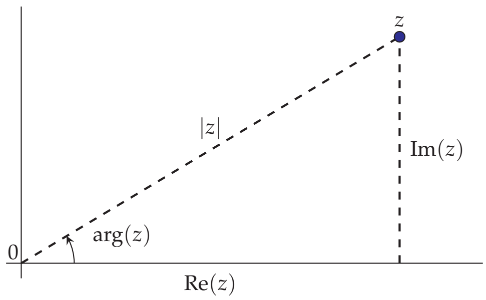
Algoritme 5 til udregning af "den multiplikativt inverse af $z \in \mathbb{C}$".

Input: $z \in \mathbb{C}$
1: **if** $z = 0$ **then**
2: **return** "0 har ingen multiplikativt invers!"
3: **else**
4: $c \leftarrow \mathrm{Re}(z)$,
5: $d \leftarrow \mathrm{Im}(z)$,
6: $N \leftarrow c^2 + d^2$,
7: **return** $\frac{c}{N} - \frac{d}{N}i$.

3.3 Modulus og argument

Vi har set i Afsnit 3.1, at et komplekst tal z kan bestemmes entydigt ved dets realdel $\mathrm{Re}(z)$ og dets imaginærdel $\mathrm{Im}(z)$, da der for ethvert $z \in \mathbb{C}$ gælder, at $z = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z)i$. Vi kaldte talparret $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ for z's rektangulære koordinater. I dette afsnit vil vi introducere en anden måde at beskrive et komplekst tal på. Givet et komplekst tal z kan vi tegne en trekant i det komplekse talplan med hjørner i de komplekse tal 0, $\mathrm{Re}(z)$ og z (se Figur 3.4). Afstanden fra z til 0 kaldes *modulus* eller *absolutværdien* af z og betegnes $|z|$. Vinklen fra den positive del af den reelle akse til vektoren fra 0 til z kaldes *argumentet* for z og betegnes $\arg(z)$.

Vi vil altid angive et argument (faktisk enhver vinkel) i radianer. Da vinklen 2π betegner en fuld omdrejning, kan man altid tilføje et heltalsmultiplum af 2π til en vinkel. For eksempel kan vinklen $-\pi/4$ også angives som $7\pi/4$, da $-\pi/4 + 2\pi = 7\pi/4$. Af denne grund siger man, at argumentet for et komplekst tal kun er bestemt op til et multiplum af 2π. Et udtryk som "$\arg(z) = 5\pi/4$" skal derfor læses som: "$5\pi/4$ er et argument for z". Det er altid muligt at finde et argument for et komplekst tal z i intervallet $]-\pi, \pi]$. Denne værdi kaldes typisk tallets *hovedargument* og betegnes $\mathrm{Arg}(z)$.



Figur 3.4: Modulus og argument af et komplekst tal z.

Fra Figur 3.4 kan vi udlede, at

$$\mathrm{Re}(z) = |z|\cos(\arg(z)) \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(z) = |z|\sin(\arg(z)). \tag{3.4}$$

Givet $|z|$ og $\arg(z)$ kan vi derfor bestemme z's rektangulære koordinater. Dette betyder, at talparret $(|z|, \arg(z))$ fuldstændigt bestemmer det komplekse tal z, da

$$z = |z|\,(\cos(\arg(z)) + \sin(\arg(z))i\,)\,. \tag{3.5}$$

Talparret $(|z|, \mathrm{Arg}(z))$ kaldes de *polære koordinater* for et komplekst tal $z \in \mathbb{C}$. Hvis et komplekst tal z er skrevet på formen $z = r\,(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)\,)$, hvor r er et positivt, reelt tal, gælder der, at $|z| = r$, og $\arg(z) = \alpha$. Desuden, hvis $\alpha \in]-\pi, \pi]$, så er $\mathrm{Arg}(z) = \alpha$. Vi kan igen fra Figur 3.4 udlede, at

$$|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \quad \text{og} \quad \tan(\arg(z)) = \mathrm{Im}(z)/\mathrm{Re}(z), \text{ hvis } \mathrm{Re}(z) \neq 0. \tag{3.6}$$

Denne ligning er nøglen til at bestemme et tals polære koordinater ud fra dets rektangulære koordinater. Mere præcist, ved brug af den inverse tangensfunktion arctan, som diskuteres i underafsnit 2.3, har vi følgende:

Sætning 3.3.1

Hvis et komplekst tal z, der er forskelligt fra nul, har de polære koordinater (r, α), så er

$$\mathrm{Re}(z) = r\cos(\alpha) \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(z) = r\sin(\alpha).$$

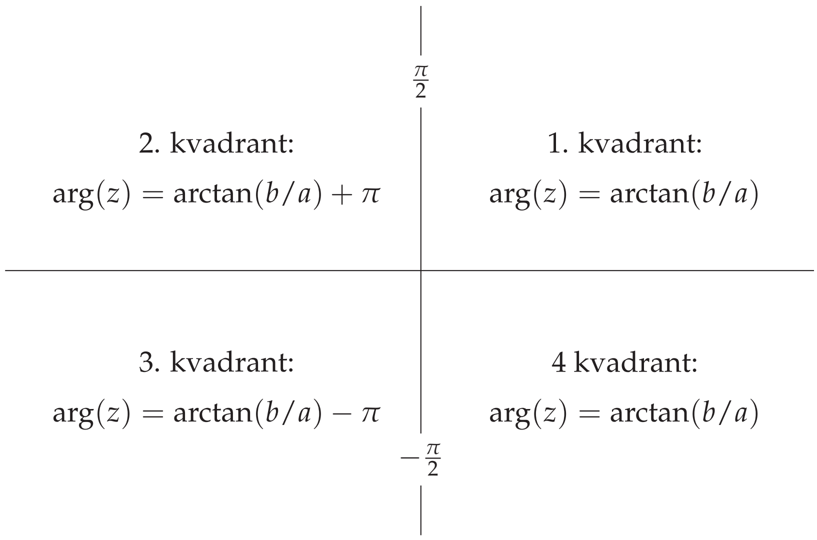
Omvent, hvis et komplekst tal z, der er forskelligt fra nul, har de rektangulære koordinater (a, b), så er:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{og} \quad \mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(b/a) & \text{hvis } a > 0, \\ \pi/2 & \text{hvis } a = 0 \text{ og } b > 0, \\ \arctan(b/a) + \pi & \text{hvis } a < 0 \text{ og } b \geq 0, \\ -\pi/2 & \text{hvis } a = 0 \text{ og } b < 0, \\ \arctan(b/a) - \pi & \text{hvis } a < 0 \text{ og } b < 0. \end{cases}$$

Bevis. Givet de polære koordinater for z kan vi benytte Ligning (3.4) til at bestemme dets rektangulære koordinater. Omvendt, givet de rektangulære koordinater (a, b) for z får vi fra Ligning (3.6), at $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Hvis $a = 0$, ligger tallet z på den imaginære akse. I et sådant tilfælde har vi, at $\mathrm{Arg}(z) = \pi/2$, hvis $b > 0$, og $\mathrm{Arg}(z) = -\pi/2$, hvis $b < 0$. Hvis $a \neq 0$, gælder der ifølge Ligning (3.6), at $\tan(\mathrm{Arg}(z)) = b/a$. Derfor gælder der da, at $\mathrm{Arg}(z) = \arctan(b/a) + n\pi$ for et heltal $n \in \mathbb{Z}$. Hvis z ligger i første eller fjerde kvadrant, ligger $\mathrm{Arg}(z)$ i intervallet $]-\pi/2, \pi/2[$. I det tilfælde får vi derfor, at $\mathrm{Arg}(z) = \arctan(b/a)$. Hvis z ligger i anden kvadrant, ligger dets argument i intervallet $]\pi/2, \pi]$. Derfor får vi da, at $\mathrm{Arg}(z) = \arctan(b/a) + \pi$. Ligeledes, hvis z ligger i tredje kvadrant, får vi, at $\mathrm{Arg}(z) = \arctan(b/a) - \pi$. $\square$

Modulus kan forstås som en funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, hvor $f(z) = |z|$. Den spiller en lignende rolle for de komplekse tal som absolutværdifunktionen i Eksempel 2.2.7. Hvis $z = a + 0i$ er et reelt tal, gælder der, at $|z| = \sqrt{a^2 + 0^2}$, hvis vi anvender modulusfunktionen. Men vi har også, at $\sqrt{a^2} = |a|$, hvor $|a|$ her betegner absolutværdien af et reelt tal. Derfor er modulus, når den udregnes af et reelt tal a, nøjagtigt det samme som absolutværdien af a. Dette forklarer, hvorfor det giver mening at benytte notationen $|a|$ både for den sædvanlige absolutværdi af et reelt tal samt for modulus af et komplekst tal. Faktisk kaldes $|z|$ ofte også absolutværdien af et komplekst tal. Bemærk slutteligt, at $|z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2 = z \cdot \bar{z}$, hvilket er den sidste lighed, der følger af Ligning (3.1).

Formlen for argumentet af et komplekst tal $a + bi$ afhænger af, i hvilken kvadrant i det komplekse talplan tallet ligger (se Figur 3.5).



Figur 3.5: Formler for argumentet af $z = a + bi$.

Eksempel 3.3.1

Bestem de polære koordinater for følgende komplekse tal.

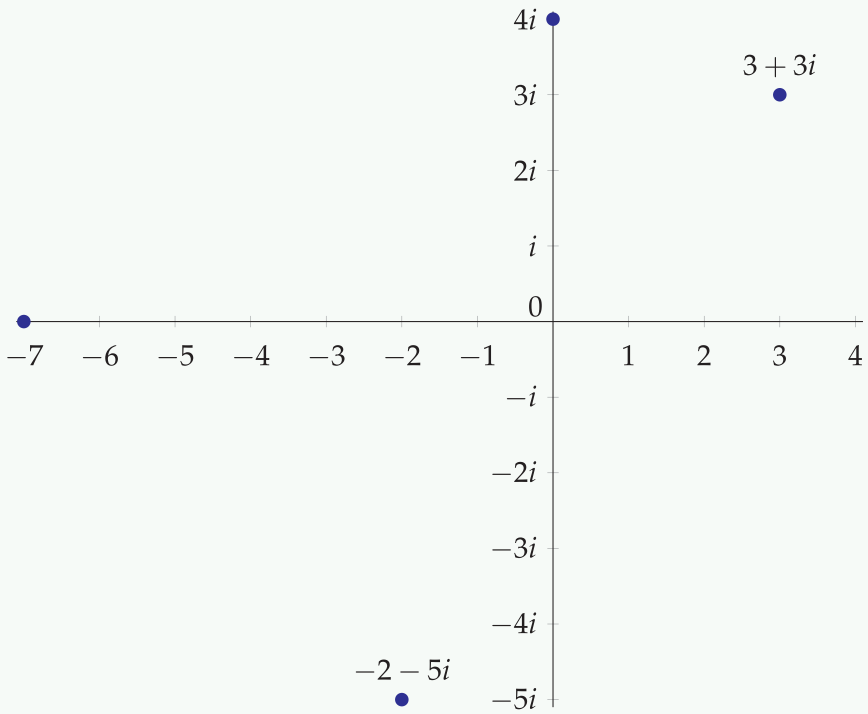
(a) $4i$

(b) -7

(c) $3 + 3i$

(d) $-2 - 5i$

Svar: Vi kan bestemme modulus og argument ved hjælp af Sætning 3.3.1. Figur 3.5 er nyttig, når vi udregner argumentet. Derfor plotter vi først de fire givne komplekse tal i det komplekse talplan.



(a) $|4i| = |0+4i| = \sqrt{0^2+4^2} = 4$ og $\operatorname{Arg}(4i) = \pi/2$. Derfor har $4i$ de polære koordinater $(4, \pi/2)$.

(b) $|-7| = \sqrt{(-7)^2+0^2} = 7$ og $\operatorname{Arg}(-7) = \arctan(0/(-7)) + \pi = \pi$. Derfor har -7 de polære koordinater $(7, \pi)$.

(c) $|3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ og $\operatorname{Arg}(3+3i) = \arctan(3/3) = \pi/4$. Derfor har $3+3i$ de polære koordinater $(3\sqrt{2}, \pi/4)$.

(d) $|-2-5i| = \sqrt{(-2)^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$

og

$\operatorname{Arg}(-2-5i) = \arctan((-5)/(-2)) - \pi = \arctan(5/2) - \pi$. Derfor har $-2-5i$ de polære koordinater $(\sqrt{29}, \arctan(5/2) - \pi)$.

Eksempel 3.3.2

De følgende polære koordinater er givet. Bestem de tilsvarende komplekse tal, og skriv dem på rektangulær form.

(a) $(2, \pi/3)$

(b) $(10, \pi)$

(c) $(4, -\pi/4)$

(d) $(2\sqrt{3}, -2\pi/3)$

(e) $(3, 2)$

Svar: Vi benytter Ligning (3.5) til at bestemme de komplekse tal z, der svarer til de givne polære koordinater. Derefter udtrykker vi disse komplekse tal på rektangulær form.

(a) $z = 2 \cdot (\cos(\pi/3) + \sin(\pi/3)i) = 2 \cdot (1/2 + \sqrt{3}/2i) = 1 + \sqrt{3}i$.

(b) $z = 10 \cdot (\cos(\pi) + \sin(\pi)i) = -10 + 0i = -10$.

(c) $z = 4 \cdot (\cos(-\pi/4) + \sin(-\pi/4)i) = 4 \cdot (\sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2i) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

(d) $z = 2\sqrt{3} \cdot (\cos(-2\pi/3) + \sin(-2\pi/3)i) = 2\sqrt{3} \cdot (-1/2 - \sqrt{3}/2i) = -\sqrt{3} - 3i$.

(e) $z = 3 \cdot (\cos(2) + \sin(2)i) = 3\cos(2) + 3\sin(2)i$.

3.4 Den komplekse eksponentialfunktion

Som vi har set, kan mange udregninger, der kan udføres med reelle tal, så som addition, subtraktion, multiplikation og division, også udføres med komplekse tal. Vi kommer i dette afsnit til at se, at også eksponentialfunktionen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, hvor $\exp(t) = e^t$, kan defineres for komplekse tal. Dette kaldes *den komplekse eksponentialfunktion*.

Definition 3.4.1

Lad $z \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal, hvis rektangulære form er givet ved $z = a + bi$ for vilkårlige $a, b \in \mathbb{R}$. Da definerer vi

$$e^z = e^a \cdot (\cos(b) + \sin(b)i).$$

Den komplekse eksponentialfunktion betegnes typisk også exp. Denne gang er funktionens definitionsmængde dog $\mathbb{C}$. Mere præcist er den komplekse eksponentialfunktion funktionen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Bemærk, at hvis z er et reelt tal, det vil sige $z = a + 0i$, så er $e^z = e^a \cdot (\cos(0) + \sin(0)i) = e^a$. Den komplekse eksponentialfunktion giver derfor nøjagtig det samme, som den sædvanlige eksponentialfunktion ville have givet, når den evalueres i et reelt tal. Derfor giver det mening at betegne både eksponentialfunktionen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ og den komplekse eksponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ med samme symbol exp.

Eksempel 3.4.1

Skriv følgende udtryk på rektangulær form:

(a) e^2

(b) e^{1+i}

(c) $e^{\pi i}$

(d) $e^{\ln(2)+i\pi/4}$ (ved ln menes der logaritmen med grundtal e)

(e) $e^{2\pi i}$

Svar: Vi benytter Definition 3.4.1 og reducerer, indtil vi opnår den ønskede rektangulære form.

(a) Da e^2 er et reelt tal, er det allerede på rektangulær form. Hvis vi alligevel benytter Definition 3.4.1, får vi $e^2 = e^{2+0i} = e^2 \cdot (\cos(0) + \sin(0)i) = e^2 \cdot (1 + 0i) = e^2$, hvilket bekræfter, at e^2 allerede var på rektangulær form. Det er også fint at skrive $e^2 = e^2 + 0i$ og derefter returnere $e^2 + 0i$ som svar.

(b) $e^{1+i} = e^1 \cdot (\cos(1) + \sin(1)i) = e\cos(1) + e\sin(1)i$.

(c) $e^{\pi i} = e^{0+\pi i} = e^0 \cdot (\cos(\pi) + \sin(\pi)i) = 1 \cdot (-1 + 0i) = -1$.

(d) $e^{\ln(2)+i\pi/4} = e^{\ln(2)} \cdot (\cos(\pi/4) + \sin(\pi/4)i) = 2(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2i) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

(e) $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + \sin(2\pi)i = 1 + 0i = 1$. Bemærk, at også $e^0 = 1$. Dette viser, at den komplekse eksponentialfunktion ikke er injektiv.

Direkte fra Definition 3.4.1 ser vi, at vi for ethvert $z \in \mathbb{C}$ har:

$$\mathrm{Re}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)}\cos(\mathrm{Im}(z)) \quad \text{og} \quad \mathrm{Im}(e^z) = e^{\mathrm{Re}(z)}\sin(\mathrm{Im}(z)).$$

Den komplekse eksponentialfunktion har mange egenskaber til fælles med den sædvanlige reelle eksponentialfunktion. For at vise disse, benytter vi os af følgende lemma.

Lemma 3.4.1

Lad $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Vi har

$$(\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1)i) \cdot (\cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_2)i) = \cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin(\alpha_1 + \alpha_2)i.$$

Bevis. Ved at gange parenteserne ud kan vi beregne real- og imaginærdelen af produktet $(\cos(\alpha_1) + \sin(\alpha_1)i) \cdot (\cos(\alpha_2) + \sin(\alpha_2)i)$. Det viser sig, at realdelen er givet ved $\cos(\alpha_1)\cos(\alpha_2) - \sin(\alpha_1)\sin(\alpha_2)$ og imaginærdelen ved $\cos(\alpha_1)\sin(\alpha_2) + \sin(\alpha_1)\cos(\alpha_2)$. Ved at benytte additionsformlerne for cosinus- og sinusfunktionerne følger lemmaet. $\square$

Sætning 3.4.2

Lad z, z_1 og z_2 være komplekse tal og n et heltal. Da gælder der, at

$$e^z \neq 0$$

$$1/e^z = e^{-z}$$

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

$$e^{z_1}/e^{z_2} = e^{z_1-z_2}$$

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

Bevis. Lad os vise det tredje punkt: $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. Først skrives z_1 og z_2 på rektangulær form: $z_1 = a_1 + b_1 i$ og $z_2 = a_2 + b_2 i$. Derefter får vi, at

$$
\begin{aligned}
e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{a_1} \cdot (\cos(b_1) + \sin(b_1)i) \cdot e^{a_2} \cdot (\cos(b_2) + \sin(b_2)i) \\
&= e^{a_1} \cdot e^{a_2} \cdot (\cos(b_1) + \sin(b_1)i) \cdot (\cos(b_2) + \sin(b_2)i) \\
&= e^{a_1+a_2} \cdot (\cos(b_1) + \sin(b_1)i) \cdot (\cos(b_2) + \sin(b_2)i) \\
&= e^{a_1+a_2} \cdot (\cos(b_1+b_2) + \sin(b_1+b_2)i) \text{ (ved at benytte Lemma 3.4.1)} \\
&= e^{a_1+a_2+(b_1+b_2)i} = e^{z_1+z_2}.
\end{aligned}
$$

□

3.5 Eulers formel

Den komplekse eksponentialfunktion angiver en forbindelse mellem trigonometri og komplekse tal. Vi vil udforske denne forbindelse i dette afsnit.

Lad t være et reelt tal. Formlen

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t) \tag{3.7}$$

er kendt som *Eulers formel* og er en konsekvens af Definition 3.4.1. Den medfører, at

$$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos(t) - i\sin(t). \tag{3.8}$$

Ligningerne (3.7) og (3.8) kan opfattes som ligninger med $\cos(t)$ og $\sin(t)$ som de ukendte. Ved at løse for $\cos(t)$ og $\sin(t)$ får vi:

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \text{ og } \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}. \tag{3.9}$$

Ligning (3.9) kan benyttes til omskrivning af produkter af cos- og sin-funktioner til en sum af cos- og sin-funktioner (det vil sige, som en sum af rent harmoniske funktioner). Denne type beregninger forekommer ofte i frekvensanalyse, hvor man forsøger at omskrive vilkårlige funktioner til en sum af rent harmoniske funktioner. Det kan også være nyttigt til udregning af integraler over trigonometriske udtryk, som vi ser i følgende eksempel.

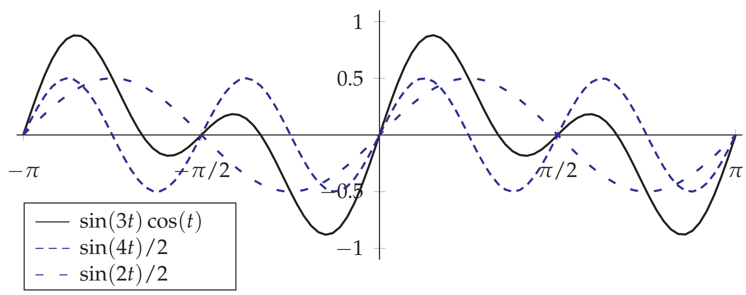
Eksempel 3.5.1
Udregn $\int \sin(3t)\cos(t)dt$.
Svar: Vi starter med at benytte identiteterne udledt fra Eulers formel i det foregående til at omskrive udtrykket $\sin(3t)\cos(t)$:

$$\begin{aligned}\sin(3t)\cos(t) &= \frac{e^{i3t}-e^{-i3t}}{2i}\cdot\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{(e^{i3t}-e^{-i3t})(e^{it}+e^{-it})}{4i}\\ &= \frac{e^{i4t}+e^{i2t}-e^{-i2t}-e^{-i4t}}{4i} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i4t}-e^{-i4t}}{2i}+\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i}\right)\\ &= \frac{\sin(4t)}{2}+\frac{\sin(2t)}{2}.\end{aligned}$$

Nu får vi

$$\int \sin(3t)\cos(t)dt = \int \frac{\sin(4t)}{2}+\frac{\sin(2t)}{2}dt = -\frac{\cos(4t)}{8}-\frac{\cos(2t)}{4}+c, \quad c\in\mathbb{R}.$$

I Figur 3.6 illustreres identiteten $\sin(3t)\cos(t) = \frac{\sin(4t)}{2}+\frac{\sin(2t)}{2}$ fra eksemplet.



Figur 3.6: Illustration af identiteten $\sin(3t)\cos(t) = \frac{\sin(4t)}{2}+\frac{\sin(2t)}{2}$.

En anden anvendelse af Eulers formel er givet i følgende sætning.

Sætning 3.5.1
Lad $n\in\mathbb{N}$ være et naturligt tal. Da gælder følgende formler:

$$\cos(nt) = \mathrm{Re}((\cos(t)+\sin(t)i)^n)$$

og

$$\sin(nt) = \mathrm{Im}((\cos(t)+\sin(t)i)^n)$$

Bevis. Nøglen er følgende ligning:

$$\cos(nt) + \sin(nt)i = e^{int} = (e^{it})^n = (\cos(t) + \sin(t)i)^n.$$

Sætningen følger ved at udregne real- og imaginærdelene på begge sider af denne lighed. $\square$

Udtrykkene i denne sætning er kendt som *DeMoivres formler*. Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 3.5.2

Udtryk $\cos(2t)$ og $\sin(2t)$ ved $\cos(t)$ og $\sin(t)$.
Svar: Ifølge DeMoivres formler for $n = 2$ har vi $\cos(2t) = \mathrm{Re}((\cos(t) + \sin(t)i)^2)$ og $\sin(2t) = \mathrm{Im}((\cos(t) + \sin(t)i)^2)$. Da

$$\begin{aligned}(\cos(t) + \sin(t)i)^2 &= \cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t)i + \sin^2(t)i^2 \\ &= \cos^2(t) + 2\cos(t)\sin(t)i - \sin^2(t) \\ &= \cos^2(t) - \sin^2(t) + 2\cos(t)\sin(t)i,\end{aligned}$$

får vi, at

$$\cos(2t) = \cos(t)^2 - \sin(t)^2$$

og

$$\sin(2t) = 2\cos(t)\sin(t).$$

Eksempel 3.5.3

Udtryk $\cos(3t)$ og $\sin(3t)$ ved $\cos(t)$ og $\sin(t)$.
Svar: Ifølge DeMoivres formler for $n = 3$ har vi $\cos(3t) = \mathrm{Re}((\cos(t) + i\sin(t))^3)$ og $\sin(3t) = \mathrm{Im}((\cos(t) + i\sin(t))^3)$. Efter nogle omskrivninger opnås $(\cos(t) + i\sin(t))^3 = (\cos(t)^3 - 3\cos(t)\sin(t)^2) + i(3\cos(t)^2\sin(t) - \sin(t)^3)$. Dermed gælder følgende:

$$\cos(3t) = \cos(t)^3 - 3\cos(t)\sin(t)^2$$

og

$$\sin(3t) = 3\cos(t)^2\sin(t) - \sin(t)^3.$$

3.6 Den polære form af et komplekst tal

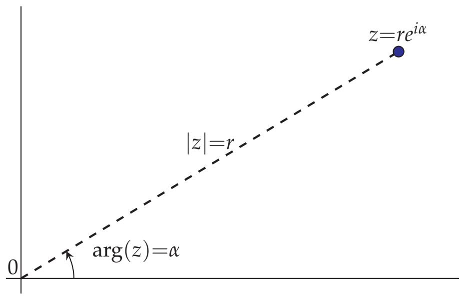
Lad r være et positivt, reelt tal og α et reelt tal. Så ser vi fra Definition 3.4.1, at $r \cdot e^{\alpha i} = r \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)i)$. Som vi har set i og efter Ligning (3.5), har tallet $r \cdot e^{\alpha i}$ modulus r og et argument lig med α (se Figur 3.7). Vi kan også omskrive Ligning (3.5) som $z = |z|e^{i\arg(z)}$. Denne skrivemåde for et komplekst tal gives et særligt navn:

Definition 3.6.1
Lad $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være et komplekst tal forskelligt fra nul. Da kaldes højresiden af ligningen

$$z = |z| \cdot e^{i \arg(z)}$$

for *den polære form* af z.

Hvis $z \neq 0$, kan vi ved brug af z's polære koordinater (r, α) direkte opskrive z på polær form, nemlig som $z = re^{i\alpha}$. Omvendt, givet et udtryk af formen $z = re^{i\alpha}$, hvor $r > 0$ er et positivt, reelt tal, og $\alpha \in]-\pi, \pi]$ er et reelt tal, så kan vi aflæse z's polære koordinater til (r, α). Se Figur 3.7 for en illustration.



Figur 3.7: Den polære form af et komplekst tal z.

Eksempel 3.6.1
Skriv følgende komplekse tal på polær form:

(a) $-1 + i$

(b) $2 + 5i$

(c) e^{7+3i}

(d) $e^{7+3i}/(-1+i)$

Svar: Man kan for hvert af de givne tal udregne modulus og argument. Når disse er fundet, kan tallet skrives på polær form.

(a) $|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ og $\arg(-1+i) = \arctan(1/-1) + \pi = 3\pi/4$. På polær form er tallet dermed givet ved $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$.

(b) $|2+5i| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$ og $\arg(2+5i) = \arctan(5/2)$. Vi får derfor, at $2+5i$ har følgende polære form: $\sqrt{29}e^{i\arctan(5/2)}$.

(c) $e^{7+3i} = e^7 e^{3i}$. Højresiden af denne ligning er allerede tallets polære form, da det er på formen $re^{i\alpha}$ (med $r > 0$ og $\alpha \in \mathbb{R}$). Vi kan aflæse, at modulus af tallet e^{7+3i} er lig med e^7, mens det har et argument lig med 3.

(d) Vi har set i første del af dette eksempel, at $-1+i = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$. Ved at fortsætte derfra får vi, at:

$$\frac{e^{7+3i}}{-1+i} = \frac{e^7 e^{3i}}{\sqrt{2}e^{i3\pi/4}} = \frac{e^7}{\sqrt{2}}\frac{e^{3i}}{e^{i3\pi/4}} = \frac{e^7}{\sqrt{2}}e^{(3-3\pi/4)i}.$$

Det sidste udtryk er den ønskede polære form. Vi kan aflæse, at tallet $e^{7+3i}/(-1+i)$ har modulus $e^7/\sqrt{2}$ og argument $3-3\pi/4$.

I eksemplet så vi, at tallet e^{7+3i} har modulus e^7, mens det har et argument lig 3. Generelt gælder der, at

$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{og} \quad \arg(e^z) = \mathrm{Im}(z). \tag{3.10}$$

I sidste punkt i Eksempel 3.4.1 så vi, at den komplekse eksponentialfunktion ikke er injektiv, da ligningen $e^z = 1$ har flere end én løsning, for eksempel både 0 og $2\pi i$. Lad os benytte det, vi har lært indtil videre, til at undersøge mere generelt, hvordan man løser denne type ligning:

Lemma 3.6.1

Lad $w \in \mathbb{C}$ være et komplekst tal. Hvis $w = 0$, har ligningen $e^z = w$ ingen løsninger. Hvis $w \neq 0$, er løsningerne til ligningen $e^z = w$ netop $z \in \mathbb{C}$ på formen $z = \ln(|w|) + \arg(w)i$, hvor $\arg(w)$ kan være ethvert argument for w.

Bevis. Ligning (3.10) medfører, at $|e^z|$ ikke kan være nul, da $e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$ for alle $z \in \mathbb{C}$. Derfor har ligningen $e^z = 0$ ingen løsninger. Antag nu, at $w \neq 0$. Hvis $e^z = w$, medfører Ligning (3.10), at $|w| = |e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ og derfor, at $\mathrm{Re}(z) = \ln(|w|)$. Ligeledes ser vi ved at benytte anden del af Ligning (3.10), at $e^z = w$ medfører, at $\arg(w) = \mathrm{Im}(z)$. Bemærk dog, at der er uendeligt mange mulige værdier for $\arg(w)$, da vi altid kan tillægge et heltalsmultiplum af 2π. Indtil videre har vi vist, at hvis $w \neq 0$, så skal enhver løsning til ligningen $e^z = w$ være på formen $z = \ln(|w|) + \arg(w)i$. Omvendt, givet ethvert z, der opfylder $z = \ln(|w|) + \arg(w)i$, hvor $\arg(w)$ er et vilkårligt argument for w, så er $e^z = e^{\ln(|w|)+\arg(w)i} = e^{\ln(|w|)} \cdot e^{i\arg(w)} = |w| \cdot e^{i\arg(w)} = w$, hvor den sidste lighed følger, da $|w|e^{i\arg(w)}$ simpelthen er den polære form af w. $\square$

En direkte konsekvens af dette lemma er, at billedet af den komplekse eksponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ med $z \mapsto e^z$ opfylder $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ligningen $e^z = 0$ har ingen løsninger, hvilket medfører, at 0 ikke tilhører billedet, mens lemmaet forklarer for ethvert komplekst tal w forskelligt fra nul, hvordan man finder komplekse tal z, der afbildes i w ved den komplekse eksponentialfunktion.

Vi kan nu genbesøge de polære koordinater og benytte egenskaberne for den komplekse eksponentialfunktion som givet i Sætning 3.4.2 til at bevise følgende sætning.

Sætning 3.6.2

Lad $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ være to komplekse tal, begge forskellige fra nul. Da gælder følgende:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

og

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

Vi har også

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$$

og

$$\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

Endelig, lad $n \in \mathbb{Z}$ være et heltal og $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et komplekst tal forskelligt fra nul. Da haves

$$|z^n| = |z|^n$$

og

$$\arg(z^n) = n \arg(z).$$

Bevis. Vi viser kun de første to dele af sætningen. Lad os definere $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $\alpha_1 = \arg(z_1)$ og $\alpha_2 = \arg(z_2)$. Ifølge Ligning (3.5) har vi

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot e^{\alpha_1 i} \cdot r_2 \cdot e^{\alpha_2 i} \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\alpha_1 i} \cdot e^{\alpha_2 i} \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{\alpha_1 i + \alpha_2 i} \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{(\alpha_1 + \alpha_2) i} \end{aligned}$$

Vi benyttede det tredje punkt i Sætning 3.4.2 i den tredje lighed. Vi kan nu konkludere, at

$$|z_1 \cdot z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{og} \quad \arg(z_1 \cdot z_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

□

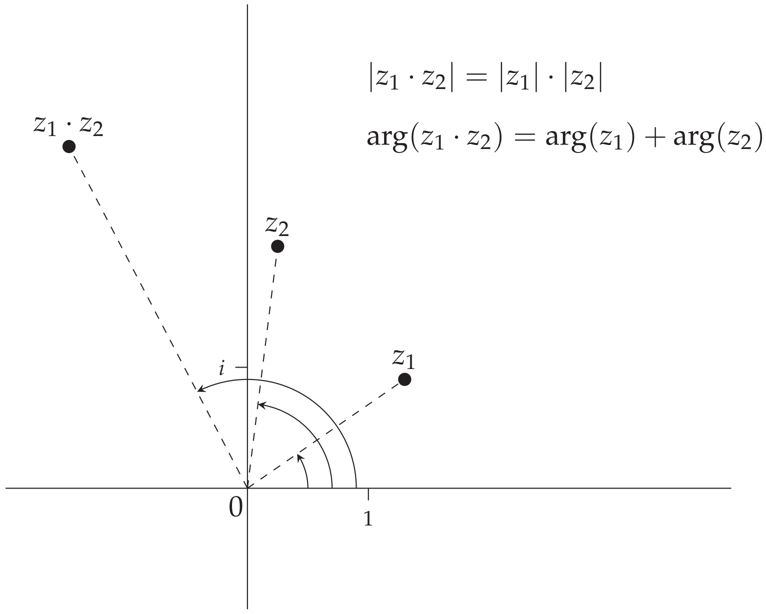
Sætning 3.6.2 angiver en geometrisk metode til at beskrive multiplikationen af to komplekse tal: længden af et produkt er produktet af længderne, og argumentet af et produkt er summen af argumenterne (se Figur 3.8).

Den polære form af et komplekst tal kan vise sig særdeles nyttig ved udregninger af heltalspotenser af komplekse tal. Lad os se på et eksempel.

Eksempel 3.6.2

Skriv følgende komplekse tal på rektangulær form. Tip: brug polære former.

(a) $(1+i)^{13}$.



Figur 3.8: Grafisk illustration af Sætning 3.6.2.

(b) $(-1-\sqrt{3}i)^{15}$.

Svar:

(a) Tallet $1+i$ har argument $\pi/4$ og modulus $\sqrt{2}$. Derfor er $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}$. Så

$$\begin{aligned}
(1+i)^{13} &= \left(\sqrt{2} \cdot e^{i\pi/4}\right)^{13} \\
&= \sqrt{2}^{13} \cdot e^{i13\pi/4} \\
&= \sqrt{2}^{13} \cdot (\cos(13\pi/4) + \sin(13\pi/4)i) \\
&= \sqrt{2}^{13} \cdot (\cos(-3\pi/4) + \sin(-3\pi/4)i) \\
&= 64\sqrt{2} \cdot (\cos(-3\pi/4) + \sin(-3\pi/4)i) \\
&= 64\sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2\right) \\
&= -64 - 64i.
\end{aligned}$$

(b) Først udregner vi modulus og argument for $-1-\sqrt{3}i$. Ifølge Sætning 3.3.1 gælder der, at

$$\arg(-1-\sqrt{3}i) = \arctan((-\sqrt{3})/(-1)) - \pi = -2\pi/3$$

og

$$|-1-\sqrt{3}i| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2.$$

Derfor er $-1-\sqrt{3}i = 2\cdot e^{-i2\pi/3}$. Dermed har vi

$$\begin{aligned}
(-1-\sqrt{3}i)^{15} &= \left(2\cdot e^{-i2\pi/3}\right)^{15}\\
&= 2^{15}\cdot e^{-i30\pi/3}\\
&= 2^{15}\cdot(\cos(-30\pi/3)+\sin(-30\pi/3)i)\\
&= 2^{15}\cdot(\cos(-10\pi)+\sin(-10\pi)i)\\
&= 2^{15}\cdot(\cos(0)+\sin(0)i)\\
&= 2^{15}\cdot(1+0i)\\
&= 2^{15}.
\end{aligned}$$