Kapitel 6

Systemer af lineære ligninger

6.1 Strukturen af lineære ligningssystemer

Når man arbejder med en ligning i én variabel benyttes ofte variablen x. I Eksempel 1.4.2 arbejdede vi for eksempel med ligningen $2|x| = 2x + 1$. Ofte er der ikke kun én variabel, men flere. Hvis der er to variable, bruger man ofte x og y, hvis der er tre x, y og z, men hvad gør man, hvis der er endnu flere variable, for eksempel fem variable? Da vil man typisk benytte sig af variabelnavne så som x_1, x_2 og så videre. Hvis vi for eksempel har behov for fem variable, benytter vi blot x_1, x_2, x_3, x_4 og x_5. Vi kan dermed lade det præcise antal variable være uspecificeret og sige, at vi har n variable for et naturligt tal $n \in \mathbb{N}$. Man siger, at man har en ligning i de n variable $x_1, \dots, x_n$.

En *lineær ligning* i de n variable $x_1, \dots, x_n$ er en ligning på formen

$$a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n = b,$$

hvor $a_1, \dots, a_n, b$ er konstanter. Disse konstanter vil typisk være reelle eller komplekse tal afhængigt af situationen. For at undgå hele tiden at skulle udspecificere, om vi arbejder med reelle eller komplekse tal, vil vi her introducere følgende definition:

Definition 6.1.1

En mængde $\mathbb{F}$ kaldes et *legeme*, hvis addition $+$ og multiplikation $\cdot$ er defineret for alle par af elementer i $\mathbb{F}$ på en sådan måde, at følgende regler er opfyldt:

(i) Addition og multiplikation er *associative*: $a_1 + (a_2 + a_3) = (a_1 + a_2) + a_3$ og $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$ for alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$.

(ii) Addition og multiplikation er *kommutative*: $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ og $a_1 \cdot a_2 = a_2 \cdot a_1$ for alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$.

(iii) Der gælder *distributivitet* af multiplikation over addition: $a_1 \cdot (a_2 + a_3) = a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3$ for alle $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}$.

(iv) Addition og multiplikation har et neutralt element. Det vil sige, der findes to forskellige elementer i $\mathbb{F}$, typisk betegnet ved 0 og 1, som opfylder henholdsvis $a + 0 = a$ og $a \cdot 1 = a$ for alle $a \in \mathbb{F}$.

(v) Additivt inverse eksisterer: for ethvert $a \in \mathbb{F}$ findes der et element i $\mathbb{F}$, betegnet $-a$ og kaldet den additivt inverse af a, således at $a + (-a) = 0$.

(vi) Multiplikativt inverse eksisterer: for ethvert $a \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ findes der et element i $\mathbb{F}$, betegnet a^{-1} eller $1/a$ og kaldet den multiplikativt inverse af a, således at $a \cdot a^{-1} = 1$.

Sætningerne 3.2.2 og 3.2.3 siger tilsammen, at de komplekse tal udgør et legeme. Også de reelle tal $\mathbb{R}$ med den sædvanlige addition og multiplikation udgør et legeme. Der findes mange flere mulige eksempler på legemer, men når vi benytter symbolet $\mathbb{F}$ eller skriver noget i stil med "legemet $\mathbb{F}$", kan du blot tænke på $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$. For at vise, at der findes flere legemer end blot disse to, giver vi her to eksempler.

Eksempel 6.1.1

Lad $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ være mængden af rationale tal, se Eksempel 2.1.4. Denne mængde, udstyret med den sædvanlige addition og multiplikation, er et legeme. Det kaldes legemet af rationale tal.

Eksempel 6.1.2

Lad $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, og definér addition og multiplikation som følger: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0$ og $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 1 \cdot 0 = 0, 1 \cdot 1 = 1$. Med disse definitioner af addition og multiplikation er $\mathbb{F}_2$ et legeme. Det kaldes legemet af bits, det binære legeme eller alternativt det endelige legeme med to elementer.

Vender vi tilbage til vores studie af lineære ligninger, kan vi nu give en mere præcis definition.

Definition 6.1.2

En lineær ligning over et legeme $\mathbb{F}$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ er en ligning på formen

$$a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n = b,$$

hvor $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{F}$.

En løsning til denne lineære ligning er et n-tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, således at $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_n \cdot v_n = b$.

Vi har set notationen $\mathbb{F}^n$ i denne definition før, nemlig i Afsnit 2.1 (se Ligning (2.3)). Det er det kartesiske produkt af $\mathbb{F}$ med sig selv n gange. Mere jordnært er $\mathbb{F}^n$ simpelthen mængden af alle n-tupler $(v_1, \ldots, v_n)$, hvor hver koordinat er et element fra $\mathbb{F}$. Nogle gange udelades multiplikationssymbolet mellem konstanten og variablerne. For eksempel har $2x_1$ den samme betydning som $2 \cdot x_1$.

Der er en spidsfindighed i Definition 6.1.2, som er let at overse. Hvis vi siger, at vi betragter en lineær ligning over $\mathbb{F}$, er vi kun interesserede i løsninger $(v_1, \ldots, v_n)$, der ligger i $\mathbb{F}^n$. Med andre ord, ved at specificere, at den lineære ligning er over $\mathbb{F}$, siger vi implicit, at alle koordinaterne af en løsning $(v_1, \ldots, v_n)$ skal ligge i $\mathbb{F}$. Lad os betragte nogle få eksempler.

Eksempel 6.1.3 (a) Find en løsning til den lineære ligning $3x_1 + x_2 = 5$ over $\mathbb{R}$.

(b) Betragt den lineære ligning $x_1 + x_2 = 0$ over $\mathbb{C}$. Er $(i, -i) \in \mathbb{C}^2$ en løsning til denne lineære ligning?

(c) Betragt den lineære ligning $x_1 + x_2 = 0$ over $\mathbb{R}$. Er $(i, -i) \in \mathbb{C}^2$ en løsning til denne lineære ligning?

(d) Betragt den lineære ligning $x_1 + x_2 = 0$ over $\mathbb{R}$. Find en løsning.

Svar:

(a) Der er mange mulige løsninger, men for eksempel er $(x_1, x_2) = (0, 5)$ en løsning, da $3 \cdot 0 + 5 = 5$.

(b) Da $i + (-i) = 0$, er talparret $(i, -i) \in \mathbb{C}^2$ en løsning til den lineære ligning $x_1 + x_2 = 0$ over $\mathbb{C}$.

(c) Selvom $i + (-i) = 0$, er talparret $(i, -i)$ ikke en løsning til den lineære ligning $x_1 + x_2 = 0$ over $\mathbb{R}$. Det skyldes, at talparret $(-i, i)$ ikke er et element i $\mathbb{R}^2$.

(d) En mulig løsning er $(1, -1)$. En anden løsning er $(0, 0)$.

Nu kommer vi til hovedemnet i dette afsnit, nemlig systemer af lineære ligninger. Det er simpelthen en udvidelse af Definition 6.1.2, hvor vi betragter ikke blot én lineær ligning men adskillige lineære ligninger over et legeme $\mathbb{F}$ på samme tid.

Definition 6.1.3

Et system af m lineære ligninger $R_1, \ldots, R_m$ over et legeme $\mathbb{F}$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ er et system af m ligninger på formen

$$\left\{ \begin{array}{lccccccc} R_1 : & a_{11} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ R_2 : & a_{21} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & & \vdots & & & & \vdots \\ R_m : & a_{m1} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

hvor $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{F}$.

En løsning til dette system af lineære ligninger er et n-tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, således at der for alle j mellem 1 og m gælder, at $a_{j1} \cdot v_1 + \cdots + a_{jn} \cdot v_n = b_j$.

Lidt forklaring af notationen er på sin plads her. Først og fremmest blev der tilføjet et dobbeltindeks på konstanterne foran variablerne. a_{ij} betegner konstanten, der optræder i ligning i foran variablen x_j. Har vi for eksempel mindst to ligninger og mindst tre variable, vil a_{23} betegne konstanten i ligning to foran variablen x_3. Hvis $m = 1$ i Definition 6.1.3, får vi blot tilfældet med én lineær ligning som beskrevet i Definition 6.1.2.

Brugen af krølleparentesen $\{$ foran ligningerne er blot for at understrege, at alle ligninger betragtes samtidigt, og at en løsning til systemet skal opfylde alle ligninger på samme tid. I logiske termer kan vi derfor skrive, at et n-tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ er en løsning til systemet af ligninger som angivet i Definition 6.1.3, netop hvis:

$$a_{11} \cdot v_1 + \cdots + a_{1n} \cdot v_n = b_1 \quad \wedge \quad \cdots \quad \wedge \quad a_{m1} \cdot v_1 + \cdots + a_{mn} \cdot v_n = b_m.$$

Brugen af $R_1, \ldots, R_m$ som "etiketter" for ligningerne er ikke nødvendig, og ofte udelades disse etiketter. Vi vil også oftest udelade disse etiketter fremover, men mens vi udvikler teorien om, hvordan man løser systemer af lineære ligninger, kan de være praktiske. For at fordøje denne definition bør vi straks gennemgå nogle eksempler.

Eksempel 6.1.4

Bestem løsningsmængden til følgende system af to lineære ligninger i to variable over $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 & = & 1 \\ \quad x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Dette system er temmelig simpelt at løse, da ligning to allerede fastsætter værdien af x_2 (nemlig $x_2 = 2$). Ved at benytte dette i den første ligning ser vi, at ethvert talpar (x_1, x_2), der opfylder *begge* lineære ligninger, vil opfylde $x_2 = 2$ og $x_1 = 1 - 2x_2 = 1 - 2 \cdot 2 = -3$. Derfor har systemet kun én løsning, nemlig $(x_1, x_2) = (-3, 2)$. Løsningsmængden er derfor givet ved $\{(-3, 2)\}$.

Eksempel 6.1.5

Betragt følgende system af lineære ligninger over $\mathbb{R}$ i variablerne $x_1, \ldots, x_4$:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_4 & = & 0 \\ \quad 3x_1 - x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Lad os overveje, hvordan dette eksempel passer med Definition 6.1.3. Først og fremmest har vi to lineære ligninger og derfor $m = 2$. Desuden er de eneste variable, der optræder i disse to ligninger, x_1, x_2, x_3 og x_4. Derfor kan vi vælge $n = 4$. At bestemme a_{ij} er nu et spørgsmål om at aflæse konstanterne foran variablerne. Men før vi gør dette, er det praktisk at omskrive ligningssystemet en smule som følger:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 0 \\ 3 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}$$

Vi kan nu direkte aflæse, at $a_{11} = 2$, $a_{12} = 5$, $a_{13} = 0$, $a_{14} = 1$, $b_1 = 0$, $a_{21} = 3$, $a_{22} = 0$, $a_{23} = -1$, $a_{24} = 0$, og $b_2 = 6$. Vi vil bestemme løsningerne til dette system af lineære ligninger senere.

Et system af m lineære ligninger over et legeme $\mathbb{F}$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ kaldes *homogent*, hvis det for alle i mellem 1 og m gælder, at $b_i = 0$. Ellers kaldes systemet *inhomogent*. Systemet givet i Eksempel 6.1.5 er inhomogent, da vi i det eksempel har $b_2 \neq 0$. Et eksempel på et homogent system af lineære ligninger i tre variable er:

$$\begin{cases} 3 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & + & 10 \cdot x_3 & = & 0 \\ 5 \cdot x_1 & + & 2 \cdot x_2 & - & 2 \cdot x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Bemærk, at tuplet $(0, 0, 0)$ er en mulig løsning til dette system. Mere generelt kan man vise, at et homogent system af lineære ligninger i n variable har tuplet $(0, \ldots, 0)$ som løsning. Lad os afslutte dette afsnit ved at formulere to struktursætninger, der vedrører løsningsmængderne til systemer af lineære ligninger. Den ene vil være for homogene systemer, den anden for inhomogene systemer.

Sætning 6.1.1

Lad et homogent system af m lineære ligninger $R_1, \ldots, R_m$ over et legeme $\mathbb{F}$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ være givet,

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & 0 \end{cases}$$

hvor $a_{11}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{F}$. Da gælder der følgende:

(i) Tuplet $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$ er en løsning til systemet.

(ii) Hvis $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ er en løsning, og $c \in \mathbb{F}$, så er $(c \cdot v_1, \ldots, c \cdot v_n)$ også en løsning.

(iii) Hvis $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ er løsninger, så er $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$ også en løsning.

Bevis. Vi har allerede beskrevet, hvorfor tuplet $(0, \ldots, 0)$ er en løsning til et homogent system. Vi vil bevise det tredje udsagn og overlade beviset på det andet udsagn til læseren. Hvis $(v_1, \ldots, v_n), (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ er løsninger, gælder der for alle j mellem 1 og m, at:

$$a_{j1} \cdot v_1 + \cdots + a_{jn} \cdot v_n = 0, \text{ og } a_{j1} \cdot w_1 + \cdots + a_{jn} \cdot w_n = 0.$$

Lægger vi disse ligninger sammen, får vi, at

$$a_{j1} \cdot v_1 + a_{j1} \cdot w_1 + \cdots + a_{jn} \cdot v_n + a_{jn} \cdot w_n = 0,$$

som kan omskrives til

$$a_{j1} \cdot (v_1 + w_1) + \cdots + a_{jn} \cdot (v_n + w_n) = 0.$$

Læseren opfordres til at tænke over, hvilke egenskaber ved et legeme fra Definition 6.1.1 vi har benyttet os af her. Da dette er sandt for ethvert j, kan vi konkludere, at $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$ også er en løsning til det givne homogene system af lineære ligninger. □

Sætning 6.1.2

Lad et inhomogent system af m lineære ligninger $R_1, \ldots, R_m$ over et legeme $\mathbb{F}$ i de n variable $x_1, \ldots, x_n$ være givet,

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{cases}$$

hvor $a_{11}, \ldots, a_{mn}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{F}$, og ikke alle b_i er nul. Hvis systemet har en løsning $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$, så vil enhver anden løsning kunne skrives på formen $(v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$, hvor $(w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{F}^n$ er en løsning til det tilsvarende homogene system:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & 0 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & 0 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & 0 \end{cases}$$

Bevis. Antag, at systemet har en løsning $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$. Lad $(v_1', \ldots, v_n') \in \mathbb{F}^n$ være en hvilken som helst anden løsning. Hvis vi definerer $w_i = v_i' - v_i$, får vi fra definitionen af w_i, at $(v_1', \ldots, v_n') = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$. Derfor skal vi vise, at tuplet $(w_1, \ldots, w_n)$ er en løsning til det homogene system angivet i sætningen. Men vi ved, at der for alle j gælder, at:

$$a_{j1} \cdot v_1' + \cdots + a_{jn} \cdot v_n' = b_j, \text{og } a_{j1} \cdot v_1 + \cdots + a_{jn} \cdot v_n = b_j.$$

Hvis vi tager forskellen mellem disse to ligninger, får vi:

$$a_{j1} \cdot v_1' - a_{j1} \cdot v_1 + \cdots + a_{jn} \cdot v_n' - a_{jn} \cdot v_n = b_j - b_j,$$

som kan omskrives til

$$a_{j1} \cdot (v_1' - v_1) + \cdots + a_{jn} \cdot (v_n' - v_n) = 0.$$

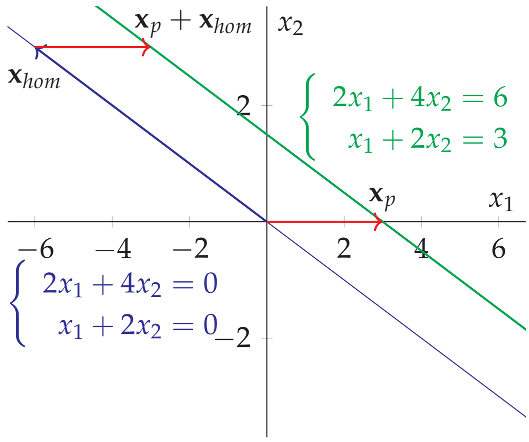
Da $w_i = v_i' - v_i$, får vi, at der for alle j gælder, at

$$a_{j1} \cdot w_1 + \cdots + a_{jn} \cdot w_n = 0.$$

Dette er præcis det samme som at sige, at $(w_1, \ldots, w_n)$ er en løsning til det homogene system angivet i sætningen. □

Det er ikke en tilfældighed, at Sætning 6.1.2 er formuleret, som den er. Sætningen gælder, hvis der findes en løsning til det inhomogene system, men der er ingen garanti for, at en sådan løsning faktisk findes. En løsning til et inhomogent system af lineære ligninger kaldes også for en *partikulær løsning*. I ord fastslår Sætning 6.1.2 således, at alle løsninger til et inhomogent system kan opnås som summen af en given partikulær løsning (hvis den findes) og løsningerne til det tilsvarende homogene system.

Vi illustrerer Sætning 6.1.2 i Figur 6.1 for et mindre inhomogent ligningssystem over legemet $\mathbb{R}$. I denne figur indikerer den grønne linje alle løsninger til systemet, mens den blå linje indikerer alle løsninger til det tilsvarende homogene system.



Figur 6.1: Løsningerne til et inhomogent system kan opnås ved at lægge en partikulær løsning $\mathbf{x}_p$ til løsningerne $\mathbf{x}_{hom}$ til det tilsvarende homogene system.

Lad os for fuldstændighedens skyld give et lille eksempel på et inhomogent system af lineære ligninger, der ikke har nogen løsninger:

Eksempel 6.1.6

Overvej følgende system af to lineære ligninger i to variable over $\mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Dette system er inhomogent, da højresiden af den første ligning ikke er nul. Dette system har ingen løsninger, da det ikke er muligt, at $x_1 + x_2$ er lig med både 1 og 0 på samme tid! Hvis det var muligt, kunne vi konkludere, at $0 = 1$, hvilket ville være en modstrid.

Før Sætningerne 6.1.1 og 6.1.2 er konstruktive, skal vi finde en måde at besvare følgende tre spørgsmål på:

(i) Hvordan beskriver vi alle løsninger til et homogent system af lineære ligninger?

(ii) Hvordan afgør vi, om et inhomogent system af lineære ligninger har en løsning?

(iii) Hvordan finder vi en løsning til et inhomogent system af lineære ligninger, hvis en sådan eksisterer?

Hvis vi kan besvare disse spørgsmål, kan Sætning 6.1.2 benyttes til at beskrive alle løsninger til et inhomogent system af lineære ligninger, der har mindst én løsning. I de næste afsnit vil vi besvare disse spørgsmål.

6.2 Transformering af et system af lineære ligninger

I dette afsnit vil vi udvikle en procedure, der transformerer et givet system af lineære ligninger til et simplere system, uden at der ændres i deres løsninger. Med andre ord ønsker vi at finde en måde, hvorpå vi kan erstatte et muligvis kompliceret system af lineære ligninger med et andet, meget simplere system af lineære ligninger, mens vi sikrer os, at det oprindelige, muligvis komplicerede system har præcis de samme løsninger som det nye, simplere system.

Før vi går i gang, vil vi først introducere en kompakt måde at opskrive et system af lineære ligninger på ved hjælp af det, der kendes som *matricer*. Som en start kan du tænke på en matrix som et rektangulært skema, der indeholder elementer fra det legeme $\mathbb{F}$, man arbejder over. I et senere kapitel vil vi give en mere dybdegående diskussion af matricer.

Definition 6.2.1

For et givet lineært ligningssystem

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{1n} \cdot x_n & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{2n} \cdot x_n & = & b_2 \\ & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & \cdots & + & a_{mn} \cdot x_n & = & b_m \end{cases}$$

betegner

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

koefficientmatricen for systemet af lineære ligninger. Matricen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

kaldes *totalmatricen* for systemet af lineære ligninger.

Bemærk, at begrebet totalmatrix på engelsk kaldes *augmented matrix*.

Eksempel 6.2.1

Lad os se på systemet af lineære ligninger som givet i Eksempel 6.1.5. Koefficientmatricen for dette system er givet ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

mens totalmatricen for dette system er

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nogle gange tegner man en lodret streg

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

i totalmatricen for at tydeliggøre, at de sidste tal 0 og 6 kommer fra ligningssystemets højreside. Dette er dog kun et æstetisk valg.

En matrix siges at have *rækker* og *søjler*. En række er et horisontalt snit af en matrix, en søjle et vertikalt snit. For eksempel har matricen

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

to rækker: den første række er givet ved $[2\ 6\ 0\ 1\ 0]$, mens den anden række er givet ved $[4\ 0\ -1\ 0\ 6]$. Tilsvarende har den fem søjler, nemlig

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

En matrix siges at være en $m \times n$-matrix, hvis den har præcis m rækker og præcis n søjler. Derfor er matricen, vi lige har set, en 2×5-matrix. Ud fra matrixdefinitionerne vist i Definition 6.2.1 er koefficientmatricen for et system af m lineære ligninger i n variable en $m \times n$-matrix. Tilsvarende er dets totalmatrix en $m \times (n+1)$-matrix. Den har nemlig en søjle mere end koefficientmatricen, der indeholder b_i'erne fra højresiderne af de lineære ligninger.

Lad os nu vende tilbage til vores primære mål: at transformere et system af lineære ligninger over et legeme $\mathbb{F}$ om til et simplere system uden at ændre på løsningsmængden. Ideen hertil er gradvist at transformere et hvilket som helst givet system over $\mathbb{F}$ til et meget simplere system, hvor vi ved hvert trin sikrer, at løsningsmængden ikke ændres. De operationer, vi vil benyttes os af til at transformere systemerne, er af tre typer:

1. Byt to ligninger.
2. Multiplicér en given ligning med en konstant forskellig fra nul fra $\mathbb{F}$.

3. Læg et multiplum af en ligning til en anden.

Lad os forklare i flere detaljer, hvad disse tre operationer gør. Den første tager to lineære ligninger fra et givet system, lad os sige R_i og R_j, og bytter om på dem. Efter denne operation finder man derfor R_j på position i og R_i på position j. Vi betegner denne operation ved $R_i \leftrightarrow R_j$.

Eksempel 6.2.2

Lad os illustrere bytteoperationen på systemet fra Eksempel 6.1.5:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}.$$

Her kan vi udføre operationen $R_1 \leftrightarrow R_2$ og opnå systemet

$$\begin{cases} 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \\ 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 0 \end{cases}.$$

Hvis vi, hvilket typisk vil være nemmere, arbejder med systemets totalmatrix, er effekten af operationen $R_1 \leftrightarrow R_2$, at totalmatricen

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

erstattes med

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Operationen $R_1 \leftrightarrow R_2$ bytter simpelthen rundt på den første og den anden række i totalmatricen. Vi vil normalt skrive dette som følger:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Den anden operation, vi vil benytte til at reducere et ligningssystem, multiplicerer en af de givne lineære ligninger med en konstant $c \in \mathbb{F}$, som er *forskellig fra nul* (med andre ord $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$). Dette betyder simpelthen, at man erstatter den lineære ligning R_j, for eksempel givet ved $a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$, med den lineære ligning $ca_{j1}x_1 + \cdots + ca_{jn}x_n = cb_j$ (som for nemheds skyld blot betegnes $c \cdot R_j$). Vi betegner denne operation ved $R_j \leftarrow c \cdot R_j$.

Eksempel 6.2.3

Lad os illustrere operationen $R_1 \leftarrow (1/2) \cdot R_1$ på systemet fra Eksempel 6.1.5. Dette svarer til at erstatte systemet

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}$$

med

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1/2 \cdot x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}.$$

I matrixnotation opnår vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftarrow (1/2) \cdot R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Effekten af operationen $R_1 \leftarrow (1/2) \cdot R_1$ på totalmatricen er, at alle elementer i den første række ganges med $1/2$. Vi bruger pilen $\longrightarrow$ til at indikere et trin, når vi ændrer matricen. Fremover vil vi bruge pilen $\longrightarrow$, hver gang en operation udføres, mens vi gradvist ændrer matricen. Under pilen skriver vi, hvilken operation der er i brug (i dette tilfælde $R_1 \leftarrow (1/2) \cdot R_1$).

Slutteligt betyder den tredje operation, hvor ligning R_j lægges d gange til ligning R_i (hvor $i \neq j$, og $d \in \mathbb{F}$) simpelthen, at den lineære ligning R_i givet ved $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ erstattes af ligningen $(a_{i1} + da_{j1})x_1 + \cdots + (a_{in} + da_{jn})x_n = b_i + db_j$. Man kan kort sige, at den lineære ligning R_i erstattes af $R_i + d \cdot R_j$, med andre ord $R_i \leftarrow R_i + d \cdot R_j$.

Eksempel 6.2.4

Lad os igen arbejde på systemet fra Eksempel 6.1.5 for at illustrere effekten af operationen $R_1 \leftarrow R_1 + 2 \cdot R_2$. Dette svarer til at erstatte systemet

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}$$

med

$$\begin{cases} 10 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & + & (-2) \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 12 \\ 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}.$$

I matrixnotation opnår vi

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftarrow R_1 + 2 \cdot R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 & 12 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Effekten af operationen $R_1 \leftarrow R_1 + 2 \cdot R_2$ på totalmatricen er derfor, at den første række erstattes af den første række plus to gange den anden række.

Som det fremgår af eksemplerne, kan effekten af de tre operationer $R_i \leftrightarrow R_j$, $R_j \leftarrow c \cdot R_j$ og $R_i \leftarrow R_i + d \cdot R_j$ opfattes som elementære operationer udført på elementerne i rækkerne i totalmatricen for det system af lineære ligninger, vi startede med. Derfor kaldes de *elementære rækkeoperationer*. Dette er også grunden til, at vi benyttede stort R i symbolerne $R_1, \ldots, R_m$ for de lineære ligninger i vores system: R var simpelthen inspireret af det første bogstav i ordet "række".

Lad os nu sikre os, at løsningsmængden til det nye system rent faktisk er identisk med løsningsmængden til det oprindelige system af lineære ligninger, når vi benytter disse elementære rækkeoperationer. Lad os opstille dette som en sætning.

Sætning 6.2.1

Lad $R_1, \ldots, R_m$ være et system af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$. Lad desuden i og j være to forskellige heltal mellem 1 og m. Da har ethvert system, der opnås ved anvendelse af operationerne $R_i \leftrightarrow R_j$, $R_j \leftarrow c \cdot R_j$ med $c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ eller $R_i \leftarrow R_i + d \cdot R_j$ med $d \in \mathbb{F}$, samme løsningsmængde som det oprindelige system.

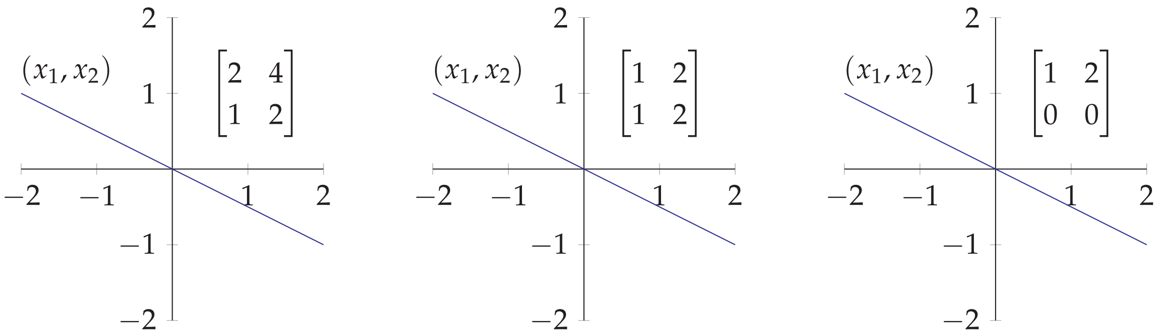
Bevis. Vi beviser kun sætningen for den elementære operation $R_i \leftarrow R_i + d \cdot R_j$. Læseren opfordres til at kontrollere, at sætningen også er sand for de to resterende elementære operationer. Vi skal vise, at løsningsmængden til systemet af lineære ligninger $R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i, R_{i+1}, \ldots, R_m$ er den samme som løsningsmængden til systemet givet ved $R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i + d \cdot R_j, R_{i+1}, \ldots, R_m$. Lad os betegne den første løsningsmængde ved S og den anden ved T. Vi ønsker at vise, at $S = T$.

Først og fremmest hævder vi, at $S \subseteq T$. Derfor vælger vi vilkårligt $(v_1, \ldots, v_n) \in S$. Vi vil vise, at $(v_1, \ldots, v_n) \in T$. Med andre ord, hvis vi antager, at $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ er en fælles løsning til de lineære ligninger $R_1, \ldots, R_m$, skal vi vise, at den også er en fælles løsning til de lineære ligninger $R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i + d \cdot R_j, R_{i+1}, \ldots, R_m$. Men så skal vi kun vise, at $(v_1, \ldots, v_n)$ er en løsning til $R_i + d \cdot R_j$. At dette er sandt, skyldes, at hvis $(v_1, \ldots, v_n)$ er en fælles løsning til R_i og R_j, så er den også en løsning til $R_i + d \cdot R_j$ for enhver konstant $d \in \mathbb{F}$. Derfor har vi, at $(v_1, \ldots, v_n) \in T$. Da vi valgte $(v_1, \ldots, v_n) \in S$ vilkårligt, medfører dette, at $S \subseteq T$.

Nu hævder vi, at $T \subseteq S$. Vi vælger vilkårligt $(v_1, \ldots, v_n) \in T$ og vil nu vise, at $(v_1, \ldots, v_n) \in S$. Dette betyder, at vi kan antage, at $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ er en fælles løsning til de lineære ligninger $R_1, \ldots, R_{i-1}, R_i + d \cdot R_j, R_{i+1}, \ldots, R_m$. Vi skal vise, at $(v_1, \ldots, v_n)$ er en løsning til R_i. Dette er dog sandt, da $R_i = (R_i + d \cdot R_j) - d \cdot R_j$. Derfor har vi, at $(v_1, \ldots, v_n) \in S$. Da vi valgte $(v_1, \ldots, v_n) \in T$ vilkårligt, medfører dette, at $T \subseteq S$.

Nu hvor vi har vist, at $S \subseteq T$ og $T \subseteq S$, medfører Lemma 2.1.1, at $S = T$, hvilket er, hvad vi ønskede at vise. □

Sætning 6.2.1 er illustreret i Figur 6.2. I denne figur angiver den blå linje løsningsmængden $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ til det homogene system af ligninger givet ved $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 0 \end{array} \right.$, som har koefficientmatricen $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Når dette ligningssystem transformeres til et nyt system via elementære rækkeoperationer, forbliver løsningsmængden den samme.



(a) Det oprindelige system (b) $R_1 \leftarrow (1/2)R_1$. (c) $R_2 \leftarrow R_1 + (-1)R_2$.

Figur 6.2: Løsningsmængden til et ligningssystem $\begin{cases} 2x_1 & + & 4x_2 = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 = & 0 \end{cases}$ ændres ikke, når systemet transformeres ved brug af elementære rækkeoperationer.

Det viser sig, at med disse tre temmeligt elementære operationer ved hånden kan vi finde løsningsmængden til ethvert system af lineære ligninger. Brugen af blot én elementær rækkeoperation vil sikkert ikke simplificere et system af lineære ligninger særligt meget, men ideen er, at hvis vi benytter adskillige elementære rækkeoperationer i træk, kan vi transformere ethvert givet system til et væsentligt simplere system. I de næste afsnit vil vi se hvordan, men inden da tager vi et kig på et eksempel.

Eksempel 6.2.5

Lad os genbesøge Eksempel 6.1.5. Dér betragtede vi følgende system af 2 ligninger i 4 variable over $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 & + & 6 \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & + & 1 \cdot x_4 & = & 0 \\ 4 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & + & (-1) \cdot x_3 & + & 0 \cdot x_4 & = & 6 \end{cases}.$$

Lad os reducere dette system ved at anvende elementære rækkeoperationer. Som Sætning 6.2.1 fortæller, ændrer dette ikke systemets løsningsmængde. Da det er langt mere kompakt at arbejde med systemets totalmatrix, vil vi gøre det.

Vi lægger ud med at anvende transformationen $R_1 \leftarrow (1/2) \cdot R_1$, hvorved vi opnår totalmatricen:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftarrow (1/2) \cdot R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Vi valgte denne operation på denne række, da vi ønskede at opnå en et-tal som første element i første række. Dette gør det nemlig nemt at eliminere variablen x_1 fra anden ligning. I det næste trin ønsker vi altså at opnå et nul som første element i anden række. Dette opnås ved anvendelse af den elementære rækkeoperation $R_2 \leftarrow R_2 - 4 \cdot R_1$, da vi derved får

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftarrow R_2 - 4 \cdot R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -12 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nu reducerer vi yderligere ved at omdanne koefficienten foran x_2 i anden ligning til et et-tal. Altså ønsker vi nu at opnå, at andet element i anden række bliver lig med ét. For at opnå dette, anvendes $R_2 \leftarrow (-1/12) \cdot R_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -12 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftarrow (-1/12) \cdot R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/12 & 2/12 & -6/12 \end{bmatrix}.$$

Brøkerne i den resulterende matrix kan reduceres en smule, så vi kunne også have skrevet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -12 & -1 & -2 & 6 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftarrow (-1/12) \cdot R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/12 & 1/6 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Det transformerede system er nu snart reduceret mest muligt, men vi kan stadig bruge anden ligning til at fjerne x_2-leddet i første ligning ved hjælp af $R_1 \leftarrow R_1 - 3 \cdot R_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/12 & 1/6 & -1/2 \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftarrow R_1 - 3 \cdot R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/12 & 1/6 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Det transformerede men tilsvarende system af lineære ligninger er nu:

$$\begin{cases} x_1 \quad + \quad (-1/4) \cdot x_3 & = \quad 3/2 \\ \qquad x_2 \quad + \quad (1/12) \cdot x_3 \quad + \quad (1/6) \cdot x_4 & = \quad -1/2 \end{cases}.$$

Det er vigtigt at huske på, at løsningsmængden til dette sidste system ifølge Sætning 6.2.1 er nøjagtig den samme som løsningsmængden til det system, vi startede med.

Det er nemt at finde løsninger $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ til dette sidste system: vælg blot $v_3, v_4 \in \mathbb{R}$ som du vil, og brug derefter de lineære ligninger til at løse for v_1 og v_2. For eksempel, hvis vi vælger $v_3 = 0$ og $v_4 = 3$, får vi, at $v_1 = (1/4)v_3 + 3/2 = 3/2$ og $v_2 = -(1/12)v_3 + (-1/6)v_4 - 1/2 = -1$. Derfor er $(3/2, -1, 0, 3)$ en løsning til systemet. Flere (faktisk alle) løsninger kan opnås på denne måde: vælg en hvilken som helst værdi for v_3 og v_4, som du ønsker, og bestem de tilsvarende v_1 og v_2 ved hjælp af ligningerne $v_1 = (1/4)v_3 + 3/2$ og $v_2 = -(1/12)v_3 + (-1/6)v_4 - 1/2$.

Dette eksempel viser, at det kan hjælpe meget at reducere et givet system af lineære ligninger først, før man forsøger at løse det.

6.3 Den reducerede trappeform af en matrix

Vi har set i Eksempel 6.2.5, at brugen af elementære rækkeoperationer kan hjælpe os med at finde frem til løsningsmængden til et system af lineære ligninger. Hvad vi nu vil gøre, er at vise, at denne tilgang altid virker. I stedet for at arbejde med systemer af lineære ligninger, vil vi arbejde med koefficient- og totalmatricer for systemerne. Vi har set, at hvis ligningssystemet består af m lineære ligninger i n variable, så er koefficientmatricen en $m \times n$-matrix, mens totalmatricen er en $m \times (n+1)$-matrix. Elementerne i disse matricer kommer fra $\mathbb{F}$, some er det legeme, vi arbejder over. Som nævnt tidligere vil vi typisk arbejde med enten $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, de reelle tal, eller $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, de komplekse tal. Mængden af alle $m \times n$-matricer med elementer i $\mathbb{F}$ vil blive betegnet $\mathbb{F}^{m \times n}$. I formler og udtryk vil vi typisk bruge fed skrift for matricer, så som $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \ldots$.

Vi lægger ud med at definere en særlig type matrix:

Definition 6.3.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ en $m \times n$-matrix med elementer i $\mathbb{F}$. Man siger, at $\mathbf{A}$ er på *reduceret trappeform*, hvis alle følgende regler er opfyldt.

(i) Hvis en række i matricen kun indeholder nuller, er den placeret nederst i matricen. Sådanne rækker kaldes nulrækker.

(ii) Det første element fra venstre, der ikke er nul, i en række, der ikke er en nulrække, er lig med 1. Dette element kaldes rækkens *pivot*.

(iii) Pivoterne i to rækker, der ikke er nulrækker, forekommer ikke i samme søjle. Desuden er pivoten i en øvre række længere til venstre end pivoten i en nedre række.

(iv) Hvis en søjle i matricen indeholder en pivot, så er alle andre elementer i den søjle 0.

Bemærk, at begrebet reduceret trappematrix på engelsk kaldes *reduced row-echelon form*. En matrix, der opfylder de førstnævnte tre regler men ikke nødvendigvis den fjerde regel, siges blot at være på *trappeform*.

Eksempel 6.3.1

1×4-matricerne $[0\ 0\ 0\ 0]$ og $[0\ 0\ 1\ 5]$ er begge på reduceret trappeform. Også 2×5-matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/12 & 1/6 & -1/2 \end{bmatrix},$$

som vi nåede frem til sidst i Eksempel 6.2.5, er på reduceret trappeform.

Et eksempel på en 1×4-matrix, der ikke er på reduceret trappeform, er: $[0\ 0\ 2\ 0]$. Det første element fra venstre, der er forskelligt fra nul, i den første (og eneste) række er ikke lig med 1. Et eksempel på en 3×4-matrix, der ikke er på reduceret trappeform, er:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denne matrix er på trappeform men ikke på reduceret trappeform. Problemet her er den tredje søjle. Denne søjle indeholder en pivot, nemlig pivoten i anden række, men udover pivoten indeholder denne søjle endnu et element, der ikke er nul (nemlig 2-tallet).

Grunden til, at reducerede trappeformer er så vigtige, ses af følgende resultat:

Sætning 6.3.1

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ være en matrix. Da kan $\mathbf{A}$ bringes på reduceret trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer.

Bevis. Lad os skitsere beviset her. Strategien i beviset er først at bringe matricen på trappeform og derefter på reduceret trappeform. Lad os derfor først vise, at vi kan benytte elementære rækkeoperationer til at bringe matricen $\mathbf{A}$ på trappeform. For at gøre dette vil vi udføre induktion på m, antallet af rækker.

Hvis $m = 1$ (basistrinnet af induktionen), er det kun muligt for $\mathbf{A}$ ikke at være på trappeform, hvis rækken indeholder et element forskelligt fra nul, der er det første element fra venstre forskelligt fra nul, lad os kalde det c, som ikke er lig med ét. Men i så fald vil operationen $R_1 \leftarrow c^{-1} \cdot R_1$ bringe $\mathbf{A}$ på trappeform.

Antag til induktionstrinnet, at $m > 1$ er givet, og at sætningen er sand for $(m-1) \times n$-matricer. Hvis alle elementer i matricen $\mathbf{A}$ er nul, er den allerede på trappeform (og faktisk også på reduceret trappeform), og vi er færdige. Lad os derfor antage, at matricen $\mathbf{A}$ har mindst ét element forskelligt fra nul. Vi starter med at vælge den mindst mulige værdi af j, der opfylder, at den j'te søjle i $\mathbf{A}$ indeholder et element forskelligt fra nul. Hvis $j > 1$, så er de første $j-1$ søjler i $\mathbf{A}$ udelukkende nulsøjler. Herefter vælger vi den mindst mulige værdi af i, der opfylder, at a_{ij}, altså det (i,j)'te element i $\mathbf{A}$, ikke er nul. Nu udfører vi operationen $R_1 \leftrightarrow R_i$. Den første række i den resulterende matrix har et element forskelligt fra nul på sin j'te position, som vi kan kalde c, og nuller som elementerne fra position 1 til $j-1$. Dernæst udfører vi operationen $R_1 \leftarrow c^{-1}R_1$, hvilket omdanner det j'te element i den første række til 1. Hvis ikke alle elementer under dette 1-tal er nuller, bruger vi elementære operationer af formen $R_j \leftarrow R_j + dR_1$ for passende valgte $d \in \mathbb{F}$ til at transformere matricen yderligere, indtil vi har en matrix, hvor der kun optræder nuller under pivoten i første række. Vi har nu transformeret matricen **A** til en matrix **B** på formen

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

Med denne notation er den første del af matricen **B**

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dette afspejler det faktum, at de første $j-1$ søjler i **B** er nulsøjler. Det er dog ikke hensigten med notationen, at den første del af **B** indeholder mindst to nulsøjler. Faktisk består denne del kun af én nulsøjle, hvis $j=2$, da vi så har $j-1=1$. I det tilfælde, at $j=1$, er den første søjle i matricen **B** faktisk ikke en nulsøjle overhovedet, da dens første koordinat er 1 med nuller under.

Uanset hvad den præcise værdi af j er, fortsætter vi ved at fjerne den første række i matricen **B**. Den $(m-1)\times n$-matrix, vi dermed opnår, betegnes **C**. Ved at benytte induktionshypotesen kan vi konkludere, at vi kan bruge elementære rækkeoperationer til at transformere matricen **C** om til en matrix $\hat{\mathbf{C}}$, der er på trappeform. Sættes den første række fra **B** tilbage, opnår vi en $m\times n$-matrix, som vi kan betegne $\hat{\mathbf{A}}$, der er på trappeform.

Dette afslutter det induktive bevis for, at enhver matrix kan bringes på trappeform ved hjælp af elementære rækkeoperationer. Det, vi stadig mangler at gøre, er at bringe denne matrix på reduceret trappeform. Vi ved ifølge definitionen på trappeformen, at pivoterne i to rækker, som ikke er nulrækker, i matricen $\hat{\mathbf{A}}$ ikke forekommer i samme søjle, og desuden at pivoten i en øvre række er længere til venstre end pivoten i en lavere række. Derfor er elementerne under en pivot i matricen $\hat{\mathbf{A}}$ lig nul. Dog er elementerne over en pivot i denne matrix ikke nødvendigvis nul. Vi kan opnå, at disse også bliver nul, ved at benytte elementære rækkeoperationer af typen $R_i \leftarrow R_i + dR_j$, hvor række R_j indeholder en pivot, og $i<j$. Vi starter med rækken, der indeholder den pivot, der er længst til højre, og ønsker at opnå udelukkende nuller over denne pivot. Derefter vil vi arbejde os mod venstre, idet vi håndterer én pivot ad gangen. Når vi når til pivoten længst til venstre og har udført den skitserede procedure for denne pivot også, vil den opnåede matrix være på reduceret trappeform. $\square$

Som et eksempel kan vi se på Eksempel 6.2.5. Dér benyttede vi os af elementære rækkeoperationer for at bringe en matrix på reduceret trappeform. Der er i princippet mange forskellige måder at benytte elementære rækkeoperationer på for at transformere en given matrix **A** til sin reducerede trappeform. Dog viser det sig, at resultatet altid er det samme for en given matrix **A**. Derfor kan vi tale om *den* reducerede trappeform af en matrix $\mathbf{A}\in\mathbb{F}^{m\times n}$. Særligt er følgende definition nu berettiget:

Definition 6.3.2

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ en matrix. Da defineres *rangen* af $\mathbf{A}$, betegnet ved $\rho(\mathbf{A})$, som antallet af pivoter i den reducerede trappeform af $\mathbf{A}$.

Beviset for Sætning 6.3.1 var algoritmisk i sin natur og kan angives som en algoritme. Lad os opskrive pseudo-koden for en algoritme, der bestemmer en trappeform af en matrix. I pseudo-koden er betegnelsen ref en forkortelse for 'row-echelon form', den engelske betegnelse for trappeform. Bemærk, hvor tæt algoritmen følger den første del af beviset for Sætning 6.3.1. Man kunne udvide algoritmen og opnå pseudo-koden for en algoritme, der bestemmer den reducerede trappeform af en matrix, men det vil vi ikke gøre her.

Algoritme 9 til bestemmelse af en trappeform af en matrix

Input: Positive heltal m, n og en $m \times n$-matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$
Output: $\mathrm{ref}(\mathbf{A})$, en trappeform af $\mathbf{A}$

if $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ **then**
    $\mathrm{ref}(\mathbf{A}) \leftarrow \mathbf{0}$,
if $m = 1$ og $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ **then**
    $j \leftarrow$ mindste søjleindeks, således at $\mathbf{A}_{1j} \neq 0$
    $\mathrm{ref}(\mathbf{A}) \leftarrow (\mathbf{A}_{1j})^{-1} \cdot \mathbf{A}$
if $m > 1$ og $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ **then**
    $j \leftarrow$ mindste ℓ, således at en række i $\mathbf{A}$ har et ℓ'te element forskelligt fra nul
    $i \leftarrow$ mindste i, således at den i'te række i $\mathbf{A}$ har et j'te element forskelligt fra nul
    $\mathbf{B} \leftarrow$ matricen opnået fra $\mathbf{A}$ ved anvendelse af $R_1 \leftrightarrow R_i$
    $b \leftarrow$ det i'te element i den første række i $\mathbf{B}$
    $\mathbf{B} \leftarrow$ matricen opnået fra $\mathbf{B}$ ved anvendelse af $R_1 \leftarrow b^{-1} \cdot R_1$
    $\mathbf{r} \leftarrow$ den første række i $\mathbf{B}$
    for $i = 2...m$ **do**
        $b \leftarrow$ det første element i den i'te række i $\mathbf{B}$
        $\mathbf{B} \leftarrow$ matricen opnået fra $\mathbf{B}$ ved anvendelse af $R_i \leftarrow R_i - bR_1$
    $\mathbf{C} \leftarrow$ matricen opnået fra $\mathbf{B}$ ved sletning af den første række
    $\mathbf{C} \leftarrow \mathrm{ref}(\mathbf{C})$ (her kalder algoritmen sig selv rekursivt)
    $\mathrm{ref}(\mathbf{A}) \leftarrow$ matricen opnået ved tilføjelse af $\mathbf{r}$ øverst i $\mathbf{C}$

Vi har i pseudo-koden benyttet en såkaldt for-løkke, der gentager kodelinjerne for hver heltalsforøgelse i det angivne variabelinterval.

6.4 Bestemmelse af alle løsninger til systemer af lineære ligninger

Indtil nu har vi typisk skrevet elementer fra $\mathbb{F}^n$ som n-tupler $(a_1, \ldots, a_n)$. Det er ret almindeligt at identificere $\mathbb{F}^n$ med $\mathbb{F}^{n \times 1}$, det vil sige at identificere et n-tupel med en $n \times 1$-matrix. En sådan matrix indeholder kun én søjle. Dette betyder for eksempel, at:

$$(1,2,4,7) \text{ identificeres med } \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

En lille advarsel er på sin plads. Selvom vi altid vil opfatte $\mathbb{F}^n$ og $\mathbb{F}^{n\times 1}$ som samme objekt, foretrækker nogle bøger at opfatte $\mathbb{F}^n$ som $\mathbb{F}^{1\times n}$.

Når vi udfører elementære rækkeoperationer, ganger vi en gang imellem rækker i en matrix med et element c fra $\mathbb{F}$ eller lægger en række til en anden række. Lignende operationer kan udføres på søjler i en matrix. Det er sædvane at definere

$$c \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_1 \\ \vdots \\ c \cdot a_n \end{bmatrix} \text{ and } \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1' \\ \vdots \\ a_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_1' \\ \vdots \\ a_n + a_n' \end{bmatrix}.$$

Denne notation, kombineret med teorien om reducerede trappeformer, gør det muligt at afgøre, om et givet system af lineære ligninger har løsninger, og i så fald at skrive alle løsninger ned på en systematisk måde. Lad os starte med at bestemme, hvornår et system har en løsning.

Sætning 6.4.1

Lad et system af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$ være givet. Betegn ved $\mathbf{A}$ systemets koefficientmatrix og ved $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ dets totalmatrix. Hvis ikke $\mathbf{A}$ og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ har samme rang, så har systemet ingen løsning.

Bevis. Vi ved fra Sætning 6.3.1, at der findes en sekvens af elementære rækkeoperationer, der bringer matricen $\mathbf{A}$ på sin reducerede trappeform, betegnet $\hat{\mathbf{A}}$. Da de første n søjler i totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ er identiske med de tilsvarende søjler i koefficientmatricen $\mathbf{A}$, vil anvendelse af præcis de samme elementære rækkeoperationer på $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ frembringe en matrix, som vi kan kalde $\mathbf{B}$, hvis første n søjler er identiske med de tilsvarende i den reducerede trappeform af $\mathbf{A}$. Derfor kan vi skrive $\mathbf{B} = [\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{b}}]$ for enhver $\hat{\mathbf{b}} \in \mathbb{F}^m$. Lad os betegne det nederste element i $\hat{\mathbf{b}}$ ved $\hat{b}_m$. Hvis den nederste række i $\hat{\mathbf{A}}$ indeholder en pivot, så er matricen $[\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{b}}]$ på reduceret trappeform. Men så ser vi, at matricerne $\mathbf{A}$ og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ har samme rang, i modstrid med antagelsen i sætningen om, at $\mathbf{A}$ og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ ikke har samme rang. Derfor kan vi antage, at den nederste række i $\hat{\mathbf{A}}$ ikke indeholder en pivot, hvilket simpelthen betyder, at denne række er en nulrække. Hvis den sidste række i $\hat{\mathbf{A}}$ ikke indeholder en pivot, og $\hat{b}_m = 0$, så er matricen $[\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{b}}]$ på reduceret trappeform, og vi kan konkludere, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, hvilket igen fører til en modstrid. Derfor kan vi antage, at den nederste række i $\hat{\mathbf{A}}$ ikke indeholder en pivot, og at $\hat{b}_m \neq 0$. Men så svarer den nederste række i matricen $[\hat{\mathbf{A}}|\hat{\mathbf{b}}]$ til ligningen $0 \cdot x_1 + \cdots 0 \cdot x_m = \hat{b}_m$. Da denne ligning ikke har nogen løsning, medfører Sætning 6.2.1, at det system, vi startede med, heller ikke har nogen løsning. □

Eksempel 6.4.1

Som i Eksempel 6.1.6 vil vi se på følgende system af to lineære ligninger i to variable over $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}.$$

Vi har allerede set i Eksempel 6.1.6, at dette system ikke har nogen løsninger. Lad os nu prøve at bekræfte dette ved hjælp af Sætning 6.4.1. Totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ er givet ved

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ved anvendelse af rækkeoperationen $R_1 \leftrightarrow R_2$ efterfulgt af $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ opnår vi totalmatricens reducerede trappeform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Derfor er $\rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$. Koefficientmatricens reducerede trappeform er matricen

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

som kan opnås fra $\mathbf{A}$ ved anvendelse af operationen $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$. Derfor er $\rho(\mathbf{A}) = 1$. Da $\rho(\mathbf{A}) \neq \rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, medfører Sætning 6.4.1, at det system, vi startede med, ganske rigtigt ikke har nogen løsning.

Når $\mathbf{A}$ og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ har samme rang, kan vi bruge teorien om reducerede trappeformer til at beskrive en løsning eksplicit. Lad os først se på et konkret eksempel.

Eksempel 6.4.2

Lad os se på et system af tre lineære ligninger i fire variable over $\mathbb{R}$, hvis totalmatrix allerede er på reduceret trappeform:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 = 5 \\ x_3 + 4 \cdot x_4 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Vi ser her, at koefficientmatricen $\mathbf{A}$ og totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ er

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ henholdsvis } [\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da begge allerede er på reduceret trappeform, kan vi straks bestemme rangene af disse matricer og konkludere, at $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = 2$. Sætning 6.4.1 er derfor ikke gældende her, og vi kan endnu ikke konkludere noget om eksistensen af løsninger. Men en løsning kan nemt bestemmes på følgende måde: først omskrives ligningerne som følger:

$$\begin{cases} x_1 &= 5 - 2 \cdot x_2 - 3 \cdot x_4 \\ x_3 &= 6 - 4 \cdot x_4 \end{cases}.$$

Nu kan vi frit vælge værdier af $x_2 = v_2$ og $x_4 = v_4$ for $v_2, v_4 \in \mathbb{R}$, og derefter beregne de resulterende værdier for x_1 og x_3. Vælger vi $v_2 = v_4 = 0$, får vi for eksempel løsningen

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nøjagtig samme tilgang kan benyttes generelt til at finde en løsning til et system af lineære ligninger, forudsat at koefficient- og totalmatricen har samme rang. Resultatet er følgende:

Sætning 6.4.2

Lad et system af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$ være givet. Lad $\mathbf{A}$ være koefficientmatricen af systemet og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ dets totalmatrix, og antag, at disse matricer har samme rang ρ. Antag desuden, at pivoterne i $\mathbf{A}$'s reducerede trappeform er at finde på positionerne $(1, j_1), \dots, (\rho, j_\rho)$, samt at de øverste ρ elementer i den sidste søjle i $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$'s reducerede trappeform er givet ved $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_\rho$. Da er m-tuplet $(v_1, \dots, v_n)$ defineret som

$$v_j = \begin{cases} \hat{b}_\ell & \text{hvis } j = j_\ell \text{ for } \ell = 1, \dots, \rho, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

en mulig løsning på systemet.

Bevis. Ideen med beviset er simpelthen at generalisere tilgangen benyttet i Eksempel 6.4.2. Først og fremmest benytter vi ligningerne svarende til rækkerne i den reducerede trappeform af totalmatricen $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ til at udtrykke variablerne x_j for $j \in \{j_1, \dots, j_\ell\}$ ved de resterende $n - \rho$ variabler. Ved derefter at sætte alle disse resterende variabler $x_j, j \notin \{j_1, \dots, j_\ell\}$ lig med nul, får vi, at $x_j = \hat{b}_\ell$ for $j = j_\ell$ og $\ell = 1, \dots, \rho$. Derfor er n-tuplet $(v_1, \dots, v_n)$ en løsning til det system, hvis totalmatrix er den reducerede trappeform af $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$. Ved anvendelse af Sætning 6.2.1 ser vi nu, at dette n-tupel også er en løsning på det system, vi startede med. $\square$

Sætning 6.4.2 siger på ingen måde, at den angivne løsning er den eneste løsning. Faktisk ved vi fra Sætning 6.1.2, at der kan være flere løsninger. Husk på, at en løsning til et inhomogent system af lineære ligninger blev kaldt en partikulær løsning. Hvis systemet af lineære ligninger er inhomogent, giver Sætning 6.4.2 derfor en sådan partikulær løsning, forudsat at den eksisterer.

Korollar 6.4.3

Lad et system bestående af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$ være givet. Lad $\mathbf{A}$ betegne koefficientmatricen for systemet og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ dets totalmatrix. Da har systemet ingen løsning, hvis og kun hvis $\mathbf{A}$ og $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ ikke har samme rang.

Bevis. Det første "hvis" er faktisk Sætning 6.4.1. Med andre ord, vi har allerede set i Sætning 6.4.1, at hvis $\rho(\mathbf{A}) \neq \rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, så har systemet ingen løsninger. Omvendt, hvis $\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$, så medfører Sætning 6.4.2, at systemet har mindst én løsning. $\square$

Med Korollar 6.4.3 kan vi nu nøjagtigt bestemme, om et givet system af lineære ligninger har en løsning. Desuden kan vi, ved hjælp af Sætning 6.4.2, bestemme mindst én løsning, hvis sådanne løsninger eksisterer. Husk på, at vi i Sætning 6.1.2 så, at for at bestemme alle løsninger til et inhomogent system af lineære ligninger er det nok at bestemme alle løsninger til det tilsvarende homogene system af lineære ligninger samt én partikulær løsning til det inhomogene system. Derfor mangler vi nu kun at beskrive, hvordan man bestemmer alle løsninger til et homogent system af lineære ligninger. Dette er netop målet med den næste sætning, men lad os først se på et eksempel for at varme op til det.

Eksempel 6.4.3

Givet er et system af tre lineære ligninger i fire variable over $\mathbb{R}$, hvis totalmatrix allerede er på reduceret trappeform:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2\cdot x_2 & + & & & 3\cdot x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 4\cdot x_4 & = & 0 \\ & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Dette system ligner systemet af lineære ligninger, vi arbejdede på i Eksempel 6.4.2, men denne gang er det homogent. Særligt er koefficientmatricen for systemet ovenfor og for systemet fra Eksempel 6.4.2 de samme, og som vi så i Eksempel 6.4.2, er den på reduceret trappeform.

Det er ikke svært at bestemme alle løsninger til systemet. Da koefficientmatricen for systemet er på reduceret trappeform med pivoter i første og tredje søjle, kan vi udtrykke x_1 og x_3 ved x_2 og x_4. Mere konkret kan vi omskrive ligningerne som

$$\left\{\begin{array}{ccr} x_1 & = & -2\cdot x_2 - 3\cdot x_4 \\ x_3 & = & -4\cdot x_4 \end{array}\right. .$$

Så enhver løsning $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$ til systemet opfylder

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot v_2 - 3\cdot v_4 \\ v_2 \\ -4\cdot v_4 \\ v_4 \end{bmatrix} = v_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + v_4 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Derfor kan vi betragte $v_2, v_4 \in \mathbb{R}$ som parametre, vi kan vælge vilkårligt, hvor hvert valg giver os en løsning til det system af lineære ligninger, vi startede med. Ved at ændre notation fra v_2 til t_1 og fra v_4 til t_2 har vi, at enhver løsning til systemet er på formen

$$t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

Omvendt, da en direkte kontrol viser, at

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er løsninger til systemet, medfører Sætning 6.1.1, at for ethvert $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ er udtrykket

$$t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

også en løsning. Samlet set ser vi, at løsningerne til det homogene system af lineære ligninger, vi startede med, netop er de $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, der opfylder

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

En sådan beskrivelse af løsningerne kaldes den *fuldstændige løsning* til det homogene system. Mængden af løsninger til det homogene system af lineære ligninger

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_4 = 0 \\ x_3 + 4 \cdot x_4 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

er præcist givet ved

$$\left\{ t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

I dette eksempel startede vi med et homogent system af lineære ligninger, hvis koefficientmatrix var på reduceret trappeform. Dette var grunden til, at vi relativt hurtigt kunne bestemme alle løsninger. Fra de tidligere afsnit ved vi dog, at selv hvis vi starter med et mere kompliceret system, kan vi altid benytte elementære rækkeoperationer til at transformere det på en sådan måde, at den resulterende koefficientmatrix er på reduceret trappeform. Grundlæggende beskriver Eksempel 6.4.3, hvordan man bestemmer alle løsninger, når koefficientmatricen for systemet af lineære ligninger er på reduceret trappeform. Samme idéer gælder for ethvert homogent system af lineære ligninger: reducér først systemet ved at bringe dets koefficientmatrix på reduceret trappeform, og følg derefter proceduren eksemplificeret i Eksempel 6.4.3. Det er muligt at beskrive resultatet i det generelle tilfælde, og for fuldstændighedens skyld gør vi det i følgende sætning. Når man bliver bedt om at løse et homogent system af lineære ligninger i praksis, er det dog ofte nemmere direkte at anvende en procedure som den i Eksempel 6.4.3 fremfor at benytte denne sætning.

Sætning 6.4.4

Lad et homogent system af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$ være givet. Lad koefficientmatricen for dette system være $\mathbf{A}$, og lad $\hat{\mathbf{A}}$ betegne $\mathbf{A}$'s reducerede trappeform. Antag videre, at $\hat{\mathbf{A}}$ har ρ pivoter i søjlerne $j_1, \ldots, j_\rho$, og betegn ved

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{c}_{n-\rho} = \begin{bmatrix} c_{1\,n-\rho} \\ \vdots \\ c_{m\,n-\rho} \end{bmatrix}$$

de $n - \rho$ søjler i $\hat{\mathbf{A}}$, der ikke indeholder en pivot. Definér afslutningsvis

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{v}_{n-\rho} = \begin{bmatrix} v_{1\,n-\rho} \\ \vdots \\ v_{n\,n-\rho} \end{bmatrix}$$

ved

$$v_{ji} = \begin{cases} -c_{\ell i} & \text{hvis } j = j_\ell \text{ for nogle } \ell = 1, \ldots, \rho, \\ 1 & \text{hvis } \mathbf{c}_i \text{ er den } j\text{'te søjle i } \hat{\mathbf{A}}, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er løsningsmængden til det givne homogene system af lineære ligninger givet ved

$$\left\{ t_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + t_{n-\rho} \cdot \begin{bmatrix} v_{1\,n-\rho} \\ \vdots \\ v_{n\,n-\rho} \end{bmatrix} \mid t_1, \ldots, t_{n-\rho} \in \mathbb{F} \right\}.$$

Bevis. Vi vil ikke bevise denne sætning men blot angive idéen bag beviset. Først anvendes Sætning 6.2.1 til at konkludere, at det homogene system med koefficientmatrix $\mathbf{A}$ har præcis de samme løsninger som det homogene system med koefficientmatrix $\hat{\mathbf{A}}$. Derefter anvendes den samme metode som i Eksempel 6.4.3 til at beskrive alle løsninger til det homogene system med koefficientmatrix $\hat{\mathbf{A}}$. □

Udtrykket

$$t_1 \cdot \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + t_{n-\rho} \cdot \begin{bmatrix} v_{1\,n-\rho} \\ \vdots \\ v_{n\,n-\rho} \end{bmatrix} \quad (t_1, \ldots, t_{n-\rho} \in \mathbb{F})$$

kaldes *den fuldstændige løsning* til det homogene system med koefficientmatrix $\mathbf{A}$. Når vi ser tilbage på Eksempel 6.4.3, ser vi, at den fuldstændige løsning til det homogene system af lineære ligninger, der blev studeret i det eksempel, blev bestemt til at være lig med

$$t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Korollar 6.4.5

Lad et homogent system af m lineære ligninger i n variable over et legeme $\mathbb{F}$ være givet. Betegn koefficientmatricen for dette system ved $\mathbf{A}$. Da har det homogene system ikke andre løsninger end nulløsningen $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{F}^n$, hvis og kun hvis $\rho(\mathbf{A}) = n$.

Bevis. Sætning 6.4.4 medfører, at hvis rangen af $\mathbf{A}$ er mindre end n, så findes der en løsning, der ikke er nulløsningen. Omvendt, hvis rangen af $\mathbf{A}$ er lig med n, er antallet af parametre t_i i beskrivelsen af løsningsmængden i Sætning 6.4.4 nul. Det betyder, at kun nulløsningen $(0, \ldots, 0)$ er en løsning. □

Status er nu, at vi kan bestemme alle løsninger til ethvert homogent system af lineære ligninger (kaldet den fuldstændige løsning til det homogene system), kan bestemme, om et inhomogent system har en løsning, og i så fald kan finde en sådan løsning (kaldet en partikulær løsning). Ved at anvende Sætning 6.1.2 kan vi i dette tilfælde også bestemme en formel, der beskriver alle løsninger til et inhomogent system af lineære ligninger: det er simpelthen summen af en partikulær løsning og den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene system. Denne sum kaldes *den fuldstændige løsning* til det inhomogene system. Derfor har vi på en konstruktiv måde besvaret alle tre spørgsmål, der blev stillet i slutningen af Afsnit 6.1.

Lad os afslutte dette afsnit med et eksempel, hvor vi bestemmer den fuldstændige løsning til et inhomogent system af lineære ligninger.

Eksempel 6.4.4

Lad os vende tilbage til det inhomogene system af lineære ligninger, der blev behandlet i Eksempel 6.4.2:

$$\begin{cases} x_1 + 2\cdot x_2 + 3\cdot x_4 = 5 \\ x_3 + 4\cdot x_4 = 6 \\ 0 = 0 \end{cases}.$$

Vi har bestemt en partikulær løsning i Eksempel 6.4.2 og den fuldstændige løsning til det tilsvarende homogene system i Eksempel 6.4.3. Ved at anvende disse tidligere resultater i kombination med Sætning 6.1.2, konkluderer vi, at den fuldstændige løsning til det inhomogene system er givet ved:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Løsningsmængden til det inhomogene system er derfor:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

6.5 Entydighed af den reducerede trappeform

Tidligere har vi udspecificeret, at en given matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ har en entydig reduceret trappeform. Eksistensen af den blev vist i Sætning 6.3.1, og i dette afsnit ønsker vi at vise entydigheden. Afsnittet kan springes over og er kun tiltænkt læsere, der ønsker at se et bevis for entydigheden af den reducerede trappeform.

Sætning 6.5.1

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme og $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ en matrix. Antag, at $\mathbf{A}$ kan transformeres ved hjælp af en sekvens af elementære rækkeoperationer til en matrix $\mathbf{B}_1$ på reduceret trappeform og ved hjælp af en anden sekvens af elementære rækkeoperationer til en matrix $\mathbf{B}_2$ på reduceret trappeform. Da gælder der, at $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$.

Bevis. Fra Sætning 6.2.1 ved vi, at de homogene systemer af lineære ligninger med koefficientmatricerne $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$ alle har præcis samme løsning. Ideen med beviset er at vise, at de homogene systemer af lineære ligninger med koefficientmatricerne $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$ kun kan have de samme løsninger, hvis $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. Desuden anvender vi induktion på n, antallet af søjler.

Lad os starte med induktionens basistrin. Hvis $n = 1$, er der kun to mulige reducerede trappeformer: $m \times 1$-matricerne

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Den første kan kun være en reduceret trappeform af $\mathbf{A}$, hvis $\mathbf{A}$ oprindeligt var en $m \times 1$-nulmatrix. Anvendelse af en hvilken som helst elementær rækkeoperation på nulmatricen resulterer i nulmatricen igen. Hvis $\mathbf{B}_1$ eller $\mathbf{B}_2$ er nulmatricen, har vi derfor $\mathbf{A} = \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$, da de i så fald alle er lig med nulmatricen. Antag nu, at $\mathbf{B}_1$ eller $\mathbf{B}_2$ er lig med den anden mulige $m \times 1$-matrix på reduceret trappeform. Hvis $\mathbf{B}_1 \neq \mathbf{B}_2$, så er mindst en af dem lig med den eneste anden $m \times 1$-matrix på reduceret trappeform, nemlig nulmatricen. Men vi har lige set, at dette ville betyde, at både $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$ er lig med nulmatricen. Denne modstrid viser, at hvis $\mathbf{B}_1$ eller $\mathbf{B}_2$ er lig med den anden $m \times 1$-matrix på reduceret trappeform, så er $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$.

Vi fortsætter med induktionstrinnet. Antag $n > 1$, samt at sætningen er sand for $n - 1$. Lad os for enhver $m \times n$-matrix $\mathbf{A}$ betegne ved $\mathbf{A}|_{n-1}$ den $m \times (n-1)$-matrix, man opnår ved at fjerne den sidste søjle fra $\mathbf{A}$. Induktionshypotesen betyder, at $\mathbf{A}|_{n-1}$ har en unik reduceret trappeform. Desuden, hvis $\mathbf{B}$ er en $m \times n$-matrix på reduceret trappeform, så er matricen $\mathbf{B}|_{n-1}$ også på reduceret trappeform. Dette medfører, at hvis $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$ er to mulige reducerede trappeformer af $\mathbf{A}$, så betyder induktionshypotesen, at $\mathbf{B}_1|_{n-1} = \mathbf{B}_2|_{n-1}$. Med andre ord: de første $n - 1$ søjler i $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$ er identiske. Kun de n'te (altså de sidste) søjler i matricerne kan være forskellige. Lad nu ρ betegne antallet af pivoter, der forekommer i $\mathbf{B}_1|_{n-1}$. Hvis den n'te søjle i $\mathbf{B}_1$ indeholder en pivot, indeholder denne søjle kun nuller undtagen i den $(\rho + 1)$'te position, hvor den indeholder et ét-tal. Derfor opfylder enhver løsning $(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{F}^n$ til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{B}_1$, at $v_n = 0$. Omvendt jævnfør Sætning 6.4.4, hvis den n'te søjle i $\mathbf{B}_1$ ikke indeholder en pivot, findes der en løsning $(v_1, \ldots, v_n)$, således at $v_n = 1$. Et lignende ræsonnement gælder for den sidste søjle i $\mathbf{B}_2$. Ved at benytte Sætning 6.2.1 kan vi konkludere, at de homogene systemer af lineære ligninger med koefficientmatricerne $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ og $\mathbf{A}$ alle har præcis de samme løsningmængder. Det følger, at enten forekommer der en pivot i den n'te søjle i både $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$, eller der forekommer ikke nogen pivot i den n'te søjle i både $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$. I det første tilfælde har vi allerede set, at den n'te søjle er fuldstændig bestemt, hvilket medfører, at $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$. I det andet tilfælde kan vi konkludere, at der er præcis én løsning til det homogene system af lineære ligninger med koefficientmatrix $\mathbf{A}$, som har udelukkende nuller i søjlerne, der ikke indeholder pivoter, pånær i den n'te søjle, hvor den har et ét-tal. Ved brug af Sætning 6.4.4 ser man, at koefficienterne for denne løsning fuldstændigt bestemmer den n'te søjle i $\mathbf{A}$'s reducerede trappeform. Vi konkluderer, at $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ også gælder i det andet tilfælde, hvor der ikke forekommer nogen pivot i den n'te søjle i både $\mathbf{B}_1$ og $\mathbf{B}_2$. $\square$