Kapitel 12

Systemer af lineære ordinære differentialligninger af første orden med konstante koefficienter

I dette kapitel vil vi lære nogle familier af differentialligninger at kende. Differentialligninger anvendes ofte til modellering af processer, der forekommer i naturen. De optræder i næsten alle områder af anvendt eksakt videnskab, som (kvante)mekanik, (bio)kemi, dynamik i biologiske systemer, bygningsteknik, studiet af elektriske komponenter og kredsløb og mange flere. Teorien om differentialligninger er omfattende, og vi vil i denne tekst tage et første kig på nogle særlige tilfælde. Inden vi går i gang, vil vi fastsætte et par konventioner og notationsformer, som vi vil benytte i resten af dette kapitel.

Som vi har set i de forgående kapitler, angiver en funktion $f : A \to B$ generelt en afbildning mellem to mængder. I dette kapitel vil vi altid antage, at funktionens definitionsmængde A er mængden af reelle tal $\mathbb{R}$. Hvis dispositionsmængden B er lig med $\mathbb{R}$, vil vi kalde den en reel funktion. Hvis $B = \mathbb{C}$, er der tale om en kompleks funktion med reelt input. Bemærk, at man på engelsk, hvis $B = \mathbb{R}$, kalder funktionen en *real-valued function*, og hvis $B = \mathbb{C}$, kalder den en *complex-valued function*.

Både reelle funktioner og komplekse funktioner med reelt input forekommer mange steder i matematikken, især i analysen. De teknikker og værktøjer fra lineær algebra, som vi har diskuteret hidtil i de foregående kapitler, kan også anvendes i analysen. Vi vil komme til at se, hvordan værktøjer fra lineær algebra kan benyttes til at løse bestemte typer af differentialligninger. I grove træk kan man opfatte en differentialligning som en måde at finde funktioner på, der har yderligere egenskaber, som involverer funktionens afledte. Vi forudsætter, at læseren er bekendt med den afledte af en reel funktion. Når en reel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet, betegner vi ved f' den afledte af f, forudsat at den eksisterer. Funktionen

$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er igen en reel funktion, og derfor kan man forsøge at bestemme den afledte af f'. Hvis den eksisterer, betegnes den typisk ved f'' eller $f^{(2)}$. På denne måde kan man rekursivt definere for $n \geq 3$, at funktionen $f^{(n)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er den afledte af $f^{(n-1)}$, forudsat at den eksisterer. Vi har set denne notation i Eksempel 9.3.4, hvor vi introducerede det reelle vektorrum $C_\infty(\mathbb{R})$, som består af alle uendeligdifferentiable (reelle) funktioner. Man kan også skrive $f^{(0)} = f$ og $f^{(1)} = f'$. I teorien om reelle funktioner og komplekse funktioner med reelt input er det ganske almindeligt at skrive en funktion som $f(t)$ i stedet for at skrive $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (for reelle funktioner) eller $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (for komplekse funktioner med reelt input). I resten af dette afsnit vil vi ofte benytte denne skrivemåde.

Lad os nu dykke ned i, hvad der menes med en n'te-ordens ordinær differentialligning. Vi vil i resten af denne tekst ofte for nemheds skyld skrive *ODE* i stedet for ordinær differentialligning, hvilket er en forkortelse for det tilsvarende engelske begreb "ordinary differential equation".

Definition 12.0.1

Lad n være et naturligt tal. En n'te-ordens ordinær differentialligning (ODE) er en ligning på formen

$$F(f^{(n)}(t), \dots, f'(t), f(t), t) = 0,$$

hvor F er en funktion, der tager $n+2$ variable som input.

En løsning til en sådan ODE er en reel funktion $f(t)$, således at

$$F(f^{(n)}(t), \dots, f'(t), f(t), t) = 0$$

for alle $t \in \mathbb{R}$. Betragt som et første lille eksempel følgende: funktionen $f(t) = e^t$ er en løsning til ODE'en $f'(t) - f(t) = 0$, fordi der gælder, at $(e^t)' = e^t$. Vi kommer til at se mange flere eksempler senere.

Der findes mange variationer og mere raffinerede definitioner. I nogle tilfælde ønsker man for eksempel, at $F(f^{(n)}(t), \dots, f'(t), f(t), t) = 0$ kun behøver at gælde for alle t i en delmængde af $\mathbb{R}$. Men alt, hvad vi behøver på dette tidspunkt, er en intuitiv forståelse af, hvad en ODE er, og derfor vil vi ikke gå i dybden med sådanne variationer her.

I denne tekst vil vi koncentrere os om en særligt interessant type ODE, hvortil værktøjer fra den lineære algebra kan anvendes, kaldet en lineær ODE. Lad os definerer en sådan i det følgende:

Definition 12.0.2

En *lineær* ODE er en ligning på formen $L(f(t)) = q(t)$, hvor $q(t) \in C_\infty(\mathbb{R})$ er en funktion, og $L : C_\infty(\mathbb{R}) \to C_\infty(\mathbb{R})$ er en lineær afbildning. Hvis $q(t)$ er nulfunktionen, kaldes den lineære ODE en *homogen* lineær ODE, og ellers kaldes den en *inhomogen* lineær ODE.

Også her findes variationer: løsningerne behøver ikke nødvendigvis at være uendeligdifferentiable, ej heller definerede på hele $\mathbb{R}$. Men som nævnt vil vi ikke dykke ned i sådanne detaljer i denne tekst men fremhæver i stedet den lineære algebras rolle.

Tager vi et tilbageblik på den lineære afbildning fra Eksempel 10.2.8, der blev defineret som $L(f(t)) = f(t) - f'(t)$, ser vi nu, at den lineære ODE $L(f(t)) = q(t)$ simpelthen svarer til differentialligningen $f'(t) - f(t) = q(t)$. Pointen med at studere lineære ODE'er i forbindelse med lineær algebra er, at så gælder Sætning 10.4.1, som kan beskrive strukturen af løsningsmængden. Lad os se på nogle flere eksempler.

Eksempel 12.0.1

Er følgende ODE'er lineære eller ej? Afgør for de ODE'er, der er lineære, om de er homogene eller inhomogene.

(a) $f''(t) + 2f'(t) + f(t) = \cos(t)$

(b) $e^t \cdot f'(t) + \cos(t) \cdot f(t) = 0$

(c) $(f'(t))^2 + f(t) = 0$

Svar:

(a) Den givne ODE er lineær med $L(f(t)) = f''(t) + 2f'(t) + f(t)$ og $q(t) = \cos(t)$. Da $q(t)$ ikke er nulfunktionen, er det en inhomogen lineær ODE.

(b) Den givne ODE er lineær med $L(f(t)) = e^t \cdot f'(t) + \cos(t) \cdot f(t)$ og $q(t) = 0$. Da $q(t)$ er nulfunktionen, er det en homogen lineær ODE.

(c) Den givne ODE er ikke lineær på grund af leddet $(f'(t))^2$.

Man er ofte primært interesseret i reelle funktioner som løsninger til en ODE, men nogle gange er det praktisk også at se på løsninger, der er komplekse funktioner med reelt input. For os vil hovedårsagen være, at sådanne funktioner kan benyttes til at finde tilsvarende reelle funktioner som løsninger til en ODE. Lad os derfor forklare, hvordan man bestemmer den afledte af en kompleks funktion med reelt input. For en givet funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ kan man for ethvert $t \in \mathbb{R}$ skrive $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, hvor $f_1(t) = \mathrm{Re}(f(t))$ er realdelen af $f(t)$, og $f_2(t) = \mathrm{Im}(f(t))$ er imaginærdelen af $f(t)$. På denne måde giver enhver kompleks funktion af typen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ anledning til de to reelle funktioner $\mathrm{Re}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret som $t \mapsto \mathrm{Re}(f(t))$ og $\mathrm{Im}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defineret som $t \mapsto \mathrm{Im}(f(t))$. Omvendt kan vi, givet to reelle funktioner $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definere en kompleks funktion $f = f_1 + i \cdot f_2$ som $t \mapsto f_1(t) + i \cdot f_2(t)$. Hvis de afledte af f_1 og f_2 eksisterer, kan vi nemlig definere den afledte af f som funktionen $f' = f_1' + i \cdot f_2'$. Tilsvarende kan vi for ethvert ikke-negativt heltal n definere den n'te-afledte som $f^{(n)} = f_1^{(n)} + i \cdot f_2^{(n)}$, forudsat at både $f_1^{(n)}$ og $f_2^{(n)}$ eksisterer. Med disse konventioner på plads kan vi derfor også tale om komplekse funktioner med reelt input som løsninger til en ODE. Vi vil se eksempler på sådanne løsninger senere.

Efter denne korte introduktion til, hvad en lineær ODE er, tager vi et kig på nogle særlige tilfælde og eksempler i de følgende afsnit.

12.1 Lineære førsteordens ODE'er

Som Definition 12.0.1 viser, udgør en førsteordens ODE en relation mellem en funktion $f(t)$ og dens afledte $f'(t)$. For eksempel er $f'(t) = f(t)$ en førsteordens ODE, men også et mere kompliceret udtryk som

$$\sin(f(t)f'(t)) = f'(t)^2 + e^t$$

er en førsteordens ODE. For at bringe disse eksempler på formen som i Definition 12.0.1, omskriver vi blot udtrykkene, så højresiden bliver lig nul. For eksempel kan det førstnævnte udtryk i forrige sætning skrives som $f'(t) - f(t) = 0$, mens det andetnævnte kan skrives som $\sin(f(t)f'(t)) - f'(t)^2 - e^t = 0$. Lad os gennemgå et par eksempler på førsteordens ODE'er.

Eksempel 12.1.1

Undersøg, om funktionen $f(t) = e^{2t}$ er en løsning til en af følgende ODE'er:

(a) $f'(t) - 2f(t) = 0$

(b) $f'(t)^2 - 4f(t) = 0$

(c) $\ln(f'(t)) - \ln(f(t)) = \ln(2)$

Svar:

(a) Ved anvendelse af kædereglen får vi, at $f'(t) = (e^{2t})' = e^{2t}(2t)' = e^{2t}2 = 2e^{2t}$. Derfor gælder der, at
$$f'(t) - 2f(t) = 2e^{2t} - 2e^{2t} = 0.$$
Vi konkluderer, at funktionen $f(t) = e^{2t}$ er en løsning til ODE'en $f'(t) = 2f(t)$.

(b) Vi har set, at $f'(t) = 2e^{2t}$. Derfor gælder der, at
$$f'(t)^2 - 4f(t) = (2e^{2t})^2 - 4e^{2t} = 4(e^{2t})^2 - 4e^{2t} = 4e^{4t} - 4e^{2t} \neq 0.$$
Derfor er funktionen $f(t) = e^{2t}$ ikke en løsning til ODE'en $f'(t)^2 - 4f(t) = 0$.

(c) Hvis $f(t) = e^{2t}$, får vi, at
$$\ln(f'(t)) - \ln(f(t)) = \ln(2e^{2t}) - \ln(e^{2t}) = \ln(2) + \ln(e^{2t}) - \ln(e^{2t}) = \ln(2),$$
så funktionen $f(t) = e^{2t}$ er en løsning til ODE'en $\ln(f'(t)) - \ln(f(t)) = \ln(2)$.

Lad os tage endnu et kig på ODE'en $f'(t) = f(t)$. Vi nævnte tidligere, at funktionen $f(t) = e^t$ er en løsning til denne ODE. Men den er ikke den eneste løsning. For eksempel opfylder begge funktionerne $f(t) = 2e^t$ og $f(t) = -5e^t$ også, at $f'(t) = f(t)$. Faktisk er enhver funktion på formen $f(t) = c \cdot e^t$, hvor $c \in \mathbb{R}$ er en konstant, en løsning til ODE'en $f'(t) = f(t)$.

Man kan vise, at enhver løsning til ODE'en $f'(t) = f(t)$ er på formen $f(t) = c \cdot e^t$. En sådan beskrivelse af alle de mulige løsninger til en ODE kaldes dens *fuldstændige løsning*. Vi benyttede begrebet fuldstændig løsning på en lignende måde, da vi beskrev løsninger til systemer af lineære ligninger i et tidligere kapitel. Ved brug af denne terminologi kan vi sige, at den fuldstændige løsning til ODE'en $f'(t) = f(t)$ er givet ved $f(t) = c \cdot e^t$, hvor $c \in \mathbb{R}$.

Det kan være svært at finde et eksplicit udtryk for den fuldstændige løsning til en ODE. Men for nogle klasser af ODE'er er det muligt. Vi vil nu se på en sådan klasse. En ODE på formen

$$f'(t) = a(t)f(t) + q(t), \tag{12.1}$$

hvor $a(t)$ og $q(t)$ er funktioner i variablen t, kaldes en *lineær førsteordens ODE*. Bemærk, at funktionen $q(t)$ på engelsk kaldes *forcing function*. Da der ikke findes et tilsvarende oftebenyttet dansk begreb, vil vi i denne tekst benytte det engelske begreb i danske sammenhænge også. En ODE som i Ligning (12.1) er faktisk lineær ifølge Definition 12.0.2: vælg blot en lineær afbildning defineret som $L(f(t)) = f'(t) - a(t)f(t)$ samt en funktion $q(t)$ som givet, og så viser ligningen $L(f(t)) = q(t)$, at $f'(t) - a(t)f(t) = q(t)$, hvilket er ækvivalent med ligningen $f'(t) = a(t)f(t) + q(t)$.

Som et eksempel er ODE'en $f'(t) = f(t)$ en lineær førsteordens ODE: vælg blot $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som funktionen defineret ved $t \mapsto 1$ og $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som funktionen defineret ved $t \mapsto 0$, og Ligning (12.1) er hermed reduceret til ligningen $f'(t) = f(t)$.

Ifølge Definition 12.0.2 kaldes ODE'en fra Ligning (12.1) *homogen*, hvis dens forcing function $q(t)$ er nulfunktionen, og ellers *inhomogen*.

Det viser sig, at man kan opstille en formel for den fuldstændige løsning til en lineær førsteordens ODE. Lad os først få overblik over notation og begreber, som vi vil benytte til denne formel: vi vil ved $P(t)$ betegne en *stamfunktion* for funktionen $a(t)$, hvilket vil sige en funktion, der opfylder $P'(t) = a(t)$. Bemærk, at det tilsvarende engelske begreb er *primitive function*, alternativt *antiderivative*. Vi vil også i resten af dette afsnit antage, at funktionen $a(t)$ har en sådan stamfunktion. Det bliver desuden nødvendigt for os at antage, at funktionen $e^{P(t)}q(t)$ har en stamfunktion. Man kan vise, at disse antagelser er sande, hvis for eksempel både funktionen $a(t)$ og $q(t)$ er differentiable. Er alt dette opfyldt, kan vi opstille følgende resultat:

Sætning 12.1.1

Den fuldstændige løsning til ODE'en $f'(t) = a(t)f(t) + q(t)$ er givet ved

$$f(t) = e^{P(t)} \int e^{-P(t)} q(t) dt.$$

Bevis. Husk, at $P'(t) = a(t)$. Ved først at benytte produktreglen og derefter kædereglen får vi, at

$$\left(e^{-P(t)} f(t)\right)' = \left(e^{-P(t)}\right)' f(t) + e^{-P(t)} f'(t) = -e^{-P(t)} a(t) f(t) + e^{-P(t)} f'(t).$$

Derfor gælder følgende:

$$\begin{aligned} f'(t) = a(t)f(t) + q(t) &\Leftrightarrow e^{-P(t)}f'(t) - e^{-P(t)}a(t)f(t) = e^{-P(t)}q(t) \\ &\Leftrightarrow \left(e^{-P(t)}f(t)\right)' = e^{-P(t)}q(t) \\ &\Leftrightarrow e^{-P(t)}f(t) = \int e^{-P(t)}q(t)dt \\ &\Leftrightarrow f(t) = e^{P(t)}\int e^{-P(t)}q(t)dt. \end{aligned}$$

□

Når man udregner integralet i Sætning 12.1.1, bør man ikke glemme integrationskonstanten, da denne konstant er nødvendig, når man finder den fuldstændige løsning. Lad os se på nogle eksempler.

Eksempel 12.1.2

Bestem den fuldstændige løsning til følgende ODE'er:

(a) $f'(t) = f(t)$

(b) $f'(t) = -\sin(t)f(t) + \sin(t)$

(c) $f'(t) = -t^{-1}f(t) + 1$, med $t > 0$

Svar:

(a) Ved omskrivning af $f'(t) = f(t)$ som $f'(t) - f(t) = 0$ ser vi, at vi kan anvende Sætning 12.1.1 ved at benytte $a(t) = 1$ og $q(t) = 0$. En stamfunktion til $a(t) = 1$ er for eksempel givet ved $P(t) = t$. Da får vi, at den fuldstændige løsning er givet ved

$$f(t) = e^t \int e^{-t} 0\, dt = e^t \int 0\, dt = e^t c = ce^t.$$

Dette stemmer overens med den fuldstændige løsning, vi fandt tidligere for denne ODE.

(b) Vi kan benytte Sætning 12.1.1 med $a(t) = -\sin(t)$ og $q(t) = \sin(t)$. Vi kan vælge $P(t) = \cos(t)$, og vi får derved den ønskede fuldstændige løsning til at være

$$f(t) = e^{\cos(t)} \int e^{-\cos(t)} \sin(t)dt = e^{\cos(t)}\left(e^{-\cos(t)} + c\right) = 1 + ce^{\cos(t)}.$$

(c) Sætning 12.1.1 kan benyttes med $a(t) = -t^{-1} = -1/t$ og $q(t) = 1$. Da $t > 0$, betyder det, at vi kan vælge $P(t) = -\ln(t)$. Den fuldstændige løsning til ODE'en $f'(t) = -t^{-1}f(t) + 1$ bliver så

$$f(t) = e^{-\ln(t)} \int e^{\ln(t)} dt = (1/e^{\ln(t)}) \int t dt = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t^2 + c\right) = \frac{t}{2} + \frac{c}{t}.$$

Et vigtigt særtilfælde af Sætning 12.1.1 er, når funktionen a er en konstant funktion, som vi kan betegne $a(t) = a_0$ for alle t. Da bliver Sætning 12.1.1 simplere at arbejde med, hvilket tydeliggøres i følgende korollar.

Korollar 12.1.2

Lad $a_0 \in \mathbb{R}$, og lad $q(t)$ være en differentiabel, reel funktion. Da har ODE'en $f'(t) = a_0 f(t) + q(t)$ den fuldstændige løsning $f(t) = e^{a_0 t} \int e^{-a_0 t} q(t) dt$. Mere konkret, hvis $Q(t)$ er en stamfunktion til $e^{-a_0 t} q(t)$, kan den fuldstændige løsning skrives som $f(t) = c \cdot e^{a_0 t} + e^{a_0 t} Q(t)$, hvor $c \in \mathbb{R}$ er vilkårlig.

Som nævnt tidligere anvendes ODE'er til at modellere processer, der forekommer i naturen. Den fuldstændige løsning til en ODE beskriver alle mulighederne for processens opførsel. For at finde ud af, hvilken af mulighederne der er den rigtige i en given situation, har man brug for yderligere information, som man normalt kan opnå ved at udføre målinger. Én mulighed er at beskrive opførslen af funktionen f for en specifik værdi af variablen t. Man kunne forestille sig, at man måler den præcise tilstand af processen i begyndelsen af et eksperiment. Matematisk set vil vi gøre dette ved at opstille en *begyndelsesværdibetingelse*, det vil sige en betingelse på formen $f(t_0) = y_0$ påført en funktion $f(t)$. Bemærk, at det tilsvarende engelske begreb er *initial-value condition*.

Definition 12.1.1

Givet en reel funktion $f(t)$ og reelle tal t_0 og y_0, således at $f(t_0) = y_0$. Da siges funktionen $f(t)$ at opfylde *begyndelsesværdibetingelsen* $f(t_0) = y_0$.

Det viser sig, at en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i mange interessante anvendelser er fuldstændig bestemt, hvis den opfylder både en førsteordens ODE og en begyndelsesværdibetingelse. Lad os give en beskrivelse af situationen for generelle ODE'er.

Definition 12.1.2

Lad $f(t)$ være en reel funktion, der opfylder følgende:

(i) $f(t)$ er en løsning til en n'te-ordens ODE $F(f^{(n)}(t), \ldots, f'(t), f(t), t) = 0$.

(ii) $f(t)$ opfylder alle begyndelsesværdibetingelserne $f(t_0) = y_0, f'(t_0) = y_1, \ldots, f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ for givne $t_0 \in \mathbb{R}$ og værdier $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Samlet kaldes disse to betingelser et *begyndelsesværdiproblem*. Funktionen $f(t)$ siges at være en løsning på begyndelsesværdiproblemet.

For en førsteordens ODE $F(f'(t), f(t), t) = 0$ svarer dette til at sige, at $f(t)$ er en løsning på begyndelsesværdiproblemet, hvis det opfylder, at både

(i) $F(f'(t), f(t), t) = 0$, og

(ii) $f(t_0) = y_0$ for givne $t_0 \in \mathbb{R}$ og en værdi y_0.

Derfor er Definition 12.1.1 blot et særtilfælde af Definition 12.1.2, nemlig det tilfælde hvor $n = 1$.

Strategien til at løse et begyndelsesværdiproblem følger ofte samme mønster. Først bestemmes den fuldstændige løsning til den givne ODE. Denne fuldstændige løsning vil indeholde nogle parametre. Lad os kalde en sådan parameter c. Derefter benyttes begyndelsesværdibetingelsen til at bestemme c. Den resulterende funktion er den ønskede løsning. Lad os se på to eksempler med førsteordens ODE'er.

Eksempel 12.1.3

Løs følgende begyndelsesværdiproblemer. Det vil sige, bestem i hvert tilfælde den funktion $f(t)$, som opfylder

(a) ODE'en $f'(t) = f(t)$ og begyndelsesværdibetingelsen $f(0) = 7$.

(b) ODE'en $f'(t) + \sin(t)f(t) = \sin(t)$ og begyndelsesværdibetingelsen $f(\pi) = 2$.

Svar:

Bemærk, at vi allerede har bestemt den fuldstændige løsning til de givne to ODE'er i Eksempel 12.1.2. Lad os nu se på hvert begyndelsesværdiproblem separat.

(a) Vi har allerede set, at den fuldstændige løsning til $f'(t) = f(t)$ er givet ved $f(t) = ce^t$. Tricket er nu at evaluere $f(t)$ i 0 og sammenligne resultatet med begyndelsesværdibetingelsen. Vi får, at $f(0) = c$, men ifølge begyndelsesværdibetingelsen skal vi have $f(0) = 7$. Dette betyder, at $c = 7$. Nu hvor vi kender c, har vi, at den ønskede funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er givet ved
$$f(t) = 7e^t.$$

(b) Den fuldstændige løsning er i dette tilfælde givet ved $f(t) = 1 + ce^{\cos(t)}$. Ved at benytte begyndelsesværdibetingelsen får vi, at $2 = f(\pi) = 1 + ce^{\cos(\pi)} = 1 + ce^{-1}$. Dette betyder, at $ce^{-1} = 1$, og derfor $c = e$. Dermed er den ønskede funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved
$$f(t) = 1 + e \cdot e^{\cos(t)} = 1 + e^{1+\cos(t)}.$$

Før vi går i dybden med mere generelle ODE'er, bør vi først etablere en fin egenskab ved den komplekse eksponentialfunktion. Vi ved, at den afledte af den reelle funktion $f(t) = e^{\lambda t}$ blot er $f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$ for ethvert $\lambda \in \mathbb{R}$. Det viser sig, at dette også gælder for den komplekse eksponentialfunktion:

Lemma 12.1.3

Lad $\lambda \in \mathbb{C}$, og betragt den komplekse funktion med reelt input $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ defineret som $f(t) = e^{\lambda t}$. Da gælder der, at $\mathrm{Re}(f) = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\cos(\mathrm{Im}(\lambda)t)$, $\mathrm{Im}(f) = e^{\mathrm{Re}(\lambda)t}\sin(\mathrm{Im}(\lambda)t)$, og $f'(t) = \lambda e^{\lambda t}$.

Bevis. Lad os skrive $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ på rektangulær form. Da har vi for ethvert $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{\lambda_1 t + i \cdot \lambda_2 t} \\ &= e^{\lambda_1 t} \cdot e^{i \cdot \lambda_2 t} \\ &= e^{\lambda_1 t} \cdot (\cos(\lambda_2 t) + i \cdot \sin(\lambda_2 t)) \\ &= e^{\lambda_1 t} \cos(\lambda_2 t) + i \cdot e^{\lambda_1 t} \sin(\lambda_2 t)). \end{aligned}$$

Dette viser, at realdelen af udtrykket $f(t) = e^{\lambda t}$ er givet ved $\mathrm{Re}(f(t)) = e^{\lambda_1 t}\cos(\lambda_2 t)$, mens imaginærdelen er givet ved $\mathrm{Im}(f(t)) = e^{\lambda_1 t}\sin(\lambda_2 t)$. Nu sætter vi $f'(t) = (\mathrm{Re}(f(t)))' + i \cdot (\mathrm{Im}(f(t)))'$. Ved at benytte produkt- og kædereglen til at beregne $\mathrm{Re}(f(t))'$ og $\mathrm{Im}(f(t))'$, får vi

$$\begin{aligned} f'(t) &= \mathrm{Re}(f(t))' + i \cdot \mathrm{Im}(f(t))' \\ &= (e^{\lambda_1 t}\cos(\lambda_2 t))' + i \cdot (e^{\lambda_1 t}\sin(\lambda_2 t))' \\ &= (e^{\lambda_1 t}\lambda_1 \cos(\lambda_2 t) + e^{\lambda_1 t}(-\sin(\lambda_2 t))\lambda_2) + i \cdot (e^{\lambda_1 t}\lambda_1 \sin(\lambda_2 t) + e^{\lambda_1 t}\cos(\lambda_2 t)\lambda_2) \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2)e^{\lambda_1 t}\cos(\lambda_2 t) + (-\lambda_2 + i\lambda_1)e^{\lambda_1 t}\sin(\lambda_2 t) \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2)e^{\lambda_1 t}(\cos(\lambda_2 t) + i\sin(\lambda_2 t)) \\ &= (\lambda_1 + i\lambda_2)e^{\lambda_1 t}e^{i\lambda_2 t} \\ &= \lambda e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

□

Denne sætning vil vise sig særdeles nyttig, når vi senere skal finde løsninger til visse typer ODE'er.

12.2 Systemer af lineære førsteordens ODE'er med konstante koefficienter

I det forrige afsnit arbejdede vi med lineære førsteordens ODE'er. Nu tager vi fat på systemer af sådanne ODE'er, men vi vil kun betragte scenarier, hvor alle de funktioner, der optræder som koefficienter, er konstante. Vi vil i næste afsnit vise, at visse højereordens ODE'er kan løses ved hjælp af teorien fra dette afsnit.

Definition 12.2.1

Lad $n > 0$ være et heltal, $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ reelle differentiable funktioner, og $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en matrix. Da er et system af lineære førsteordens ODE'er en ligning på formen

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

Matricen $\mathbf{A}$ kaldes *koefficientmatricen* for systemet, mens funktionerne $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ på engelsk kaldes systemets *forcing functions*. Hvis alle disse forcing functions $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ er lig med nulfunktionen, kaldes systemet af ODE'er *homogent*, og ellers kaldes det *inhomogent*. En løsning til et inhomogent system af lineære førsteordens ODE'er kaldes en *partikulær løsning*.

Eksempel 12.2.1

Følgende system af lineære førsteordens ODE'er er givet:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{12.3}$$

(a) Er det givne system af ODE'er i Ligning (12.3) homogent eller inhomogent?

(b) Er $(f_1(t), f_2(t)) = (e^{2t}, 0)$ en løsning til Ligning (12.3)?

(c) Er $(f_1(t), f_2(t)) = (-e^t, 0)$ en løsning til Ligning (12.3)?

Svar:

(a) Systemet af ODE'er i Ligning (12.3) er inhomogent. Dette konkluderer vi hurtigt ved at se på systemets forcing functions $q_2(t)$ og $q_1(t)$. Selvom funktionen $q_2(t)$ er nulfunktionen, er funktionen $q_1(t)$ det ikke. For et homogent system skal alle dets forcing functions være nulfunktionen.

(b) Hvis $(f_1(t), f_2(t)) = (e^{2t}, 0)$, så er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (e^{2t})' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix},$$

og

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot e^{2t} + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot e^{2t} + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} + e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Derfor er $(f_1(t), f_2(t)) = (e^{2t}, 0)$ ikke en løsning til Ligning (12.3).

(c) Hvis $(f_1(t), f_2(t)) = (-e^t, 0)$, da er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-e^t)' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 0 \end{bmatrix},$$

og

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-e^t) + 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-e^t) + 2 \cdot 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Derfor er $(f_1(t), f_2(t)) = (-e^t, 0)$ en løsning til Ligning (12.3). Jævnfør definitionen kan vi derfor kalde den en partikulær løsning til differentialligningssystemet.

Vi vil nu beskrive strukturen af løsningerne til systemer af lineære førsteordens ODE'er, hvilket gøres lidt på samme måde, som vi gjorde for systemer af lineære ligninger.

Sætning 12.2.1

Lad et inhomogent system af ODE'er som i Ligning (12.2) være givet, og antag, at $(g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t))$ er en partikulær løsning til dette system. Da er enhver anden løsning $(\tilde{g}_1(t), \tilde{g}_2(t), \ldots, \tilde{g}_n(t))$ til Ligning (12.2) på formen

$$\begin{bmatrix} \tilde{g}_1(t) \\ \tilde{g}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{g}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix},$$

hvor $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ er en løsning til det homogene system af ODE'er, der svarer til Ligning (12.2):

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{12.4}$$

Bevis. Antag, at $(\tilde{g}_1(t), \tilde{g}_2(t), \ldots, \tilde{g}_n(t))$ er en vilkårlig løsning til Ligning (12.2). Da viser en direkte beregning, at $(\tilde{g}_1(t) - g_1(t), \tilde{g}_2(t) - g_2(t), \ldots, \tilde{g}_n(t) - g_n(t))$ opfylder Ligning (12.4). Hvis vi derefter definerer $f_i(t) = \tilde{g}_i(t) - g_i(t)$ for $i = 1, \ldots, n$, ser vi, at $(\tilde{g}_1(t), \tilde{g}_2(t), \ldots, \tilde{g}_n(t))$ kan skrives som angivet i sætningen.

Omvendt, hvis $(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ er en løsning til det homogene system fra Ligning (12.4), viser en direkte beregning, at $(g_1(t) + f_1(t), g_2(t) + f_2(t), \ldots, g_n(t) + f_n(t))$ er en løsning til det inhomogene system fra Ligning (12.2). $\square$

Algoritmisk betyder dette, at vi for at løse et inhomogent system af ODE'er som i Ligning (12.2) skal finde en partikulær løsning dertil og derefter alle løsninger til det tilsvarende homogene system af ODE'er givet i Ligning (12.4). Konceptuelt kan man forstå Sætning 12.2.1 på en anden måde. Lad $C_\infty(\mathbb{R})$ være vektorrummet fra Eksempel 9.3.4. Det består af alle funktioner med definitionsmængde og dispositionsmængde $\mathbb{R}$, der kan differentieres vilkårligt ofte. Betragt for en givet matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ afbildningen $L_\mathbf{A} : C_\infty(\mathbb{R})^n \to C_\infty(\mathbb{R})^n$ defineret ved

$$L_\mathbf{A}\left(\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} - \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}. \tag{12.5}$$

Man kan vise, at $L_\mathbf{A}$ er en lineær afbildning mellem reelle vektorrum. Kernen af denne afbildning er netop løsningsmængden til det homogene system af ODE'er i Ligning (12.4). Denne observation er en generalisering af det, vi allerede har set i Eksempel 10.2.8. En partikulær løsning er blot en vektor $\mathbf{v}_p = (g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)) \in C_\infty(\mathbb{R})^n$, der opfylder, at $L_\mathbf{A}(\mathbf{v}_p) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$. Derfor er Sætning 12.2.1 blot et særtilfælde af andet punkt i Sætning 10.4.1. Bemærk, da kernen af enhver lineær afbildning er et underrum, at løsningsmængden til et homogent system af lineære førsteordens ODE'er (med konstante koefficienter) faktisk er et vektorrum over de reelle tal, da det er kernen af den lineære afbildning $L_\mathbf{A}$. Et meget nyttigt faktum, som vi ikke vil bevise her, er, at dette vektorrum har endelig dimension, som vi kan kalde n. Det er nyttigt at vide, da det betyder, at for at beskrive alle løsninger til systemet i Ligning (12.4) er det nok at finde en basis, altså n lineært uafhængige løsninger. Vi vil benytte dette frit senere. Hvad vi primært vil fokusere på i resten af dette afsnit, er, hvordan man finder en sådan basis. Begrebet fuldstændig løsning, som vi er stødt på igen i Afsnit 12.1 for lineære førsteordens ODE'er, kan nu generaliseres som følger:

Definition 12.2.2

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ være givet. Den *fuldstændige løsning* til de homogene ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

er et udtryk på formen

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R},$$

hvor $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ er en ordnet basis for kernen af den lineære afbildning $L_\mathbf{A} : C_\infty(\mathbb{R})^n \to C_\infty(\mathbb{R})^n$ defineret i Ligning (12.5). Hvis $q_1(t), \ldots, q_n(t)$ er forcing functions (der ikke alle er nulfunktionen), og $\mathbf{v}_p = (g_1(t), \ldots, g_n(t)) \in C_\infty(\mathbb{R})^n$ er en partikulær løsning til det inhomogene system af ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix},$$

så er den fuldstændige løsning til det inhomogene system et udtryk på formen

$$\mathbf{v}_p + c_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n\,, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Et første vigtigt trick herefter er at anvende teorien om egenværdier og egenvektorer for matricen $\mathbf{A}$, hvilket vi ser i følgende lemma.

Lemma 12.2.2

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ være en matrix, og antag, at $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ med egenværdi $\lambda \in \mathbb{R}$. Da opfylder vektoren af funktioner

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

det homogene system af ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Bevis. På den ene side har vi

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 (e^{\lambda t})' \\ v_2 (e^{\lambda t})' \\ \vdots \\ v_n (e^{\lambda t})' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \lambda e^{\lambda t} \\ v_2 \lambda e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n \lambda e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

På den anden side har vi

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda t} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \cdot e^{\lambda t} = \lambda \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

$\square$

Eksempel 12.2.2

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Find en løsning til det homogene system af lineære førsteordens ODE'er med koefficientmatrix **A**.

Svar:

Vi bliver bedt om at finde en løsning til det følgende system af ODE'er:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{12.6}$$

Med Lemma 12.2.2 i tankerne lægger vi ud med at finde en egenværdi og tilhørende egenvektor for den givne matrix **A**. Det karakteristiske polynomium for **A** er:

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = (2-\lambda)^2 = (\lambda - 2)^2.$$

Dermed er 2 den eneste egenværdi, matricen **A** har. For at finde en egenvektor for **A** tilhørende egenværdien 2 skal vi finde en vektor forskellig fra nulvektoren, der tilhører kernen af matricen $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2$. Vi bestemmer kernen ved at reducere $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2$ til sin reducerede trappeform, men det viser sig i dette særtilfælde, at den allerede er på reduceret trappeform:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vi konkluderer med det samme, at $\ker(\mathbf{A} - 2\mathbf{I}_2)$ er et endimensionelt vektorrum med en basis givet ved for eksempel

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Nu medfører Lemma 12.2.2, at

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1e^{2t} \\ 0e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

er en løsning til Ligning (12.6).

Det er tilstrækkeligt at benytte egenvektorer som i Lemma 12.2.2 til at bestemme den fuldstændige løsning til Ligning (12.4), når matricen **A** kan diagonaliseres. Husk på, at dette svarer til at sige, at der eksisterer en invertibel matrix **Q**, således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix. Mere præcist så vi i forrige kapitel, at søjlerne i matricen **Q** er lineært uafhængige egenvektorer for matricen $\mathbf{A}$. Hvis disse søjler tilhører egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, så har vi faktisk $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \Lambda$, hvor Λ er diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i sin diagonal.

Sætning 12.2.3

Antag, at $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er en diagonalisérbar matrix. Mere præcist, lad $\mathbf{Q}$ være en invertibel matrix, således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er diagonalmatricen med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i sin diagonal. Så har det homogene system af ODE'er i Ligning (12.4) den fuldstændige løsning

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n \cdot e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Bevis. Bemærk først, at systemet i Ligning (12.4) er ækvivalent med systemet

$$\mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}.$$

Definerer vi

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}, \tag{12.7}$$

ser vi, at $(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ er en løsning til systemet i Ligning (12.4), hvis og kun hvis

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1'(t) \\ \tilde{f}_2'(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t) \end{bmatrix}. \tag{12.8}$$

Men da matricen $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix med diagonalelementerne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, reduceres systemet i Ligning (12.8) blot til systemet af differentialligningerne givet ved $\tilde{f}_1'(t) = \lambda_1 \cdot \tilde{f}_1(t), \tilde{f}_2'(t) = \lambda_2 \cdot \tilde{f}_2(t), \ldots, \tilde{f}_n'(t) = \lambda_n \cdot \tilde{f}_n(t)$. Hver af disse differentialligninger er en homogen lineær ODE af første orden og kan derfor løses individuelt ved hjælp af Sætning 12.1.1. Resultatet er, at $\tilde{f}_i(t) = c_i \cdot e^{\lambda_i t}$ for $i = 1, \ldots, n$ og $c_i \in \mathbb{R}$. Med andre ord

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_1(t) \\ \tilde{f}_2(t) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n \cdot e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Men så følger udsagnet i sætningen ved brug af Ligning (12.7). □

En direkte konsekvens af sætningen er følgende alternative beskrivelse af den fuldstændige løsning.

Korollar 12.2.4

Antag, at $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er en diagonalisérbar matrix. Mere præcist, lad $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ være en ordnet basis for $\mathbb{R}^n$ bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$, der svarer til egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Så har det homogene system i Ligning (12.4) den fuldstændige løsning

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Bevis. Lad $\mathbf{Q}$ være matricen med søjler bestående af egenvektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Da er $\mathbf{Q}$ en invertibel matrix, der opfylder, at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}$ er en diagonalmatrix med egenværdierne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ i sin diagonal. Ved at anvende Sætning 12.2.3 følger korollaret. □

Bemærk, at Sætning 12.2.3 og Korollar 12.2.4 tillader, at egenværdier kan optræde flere gange. Med andre ord: vi tillader tilfælde, hvor den algebraiske multiplicitet af egenværdierne er større end én. Da vi også antager, at matricen $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar, skal den algebraiske og geometriske multiplicitet af en egenværdi dog være ens. Derfor vil sætningen ikke være anvendelig, hvis nogle egenværdier for $\mathbf{A}$ har en mindre geometrisk multiplicitet end algebraisk multiplicitet.

Eksempel 12.2.3

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Så er $p_{\mathbf{A}}(Z) = (Z-2)^2 \cdot (Z^2 - 1) = (Z-2)^2 \cdot (Z-1) \cdot (Z+1)$. Derfor har $\mathbf{A}$ de tre egenværdier 2, 1 og -1 med algebraiske multipliciteter henholdsvis 2, 1 og 1. Man kan vise, at baser for egenrummene E_2, E_1 og E_{-1} kan gives ved

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ og } \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bemærk, at den geometriske og algebraiske multiplicitet er den samme for hver egenværdi. Ved at benytte Korollar 12.2.4 ser vi, at den fuldstændige løsning til systemet af lineære førsteordens ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \\ f_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}$$

er

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^t + c_4e^{-t} \\ c_3e^t - c_4e^{-t} \end{bmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Før vi går videre til tilfælde, hvor matricen $\mathbf{A}$ ikke kan diagonaliseres, bør vi nævne, at man også for systemer af differentialligninger som dem, vi har undersøgt her, kan opstille begyndelsesværdibetingelser svarende til dem, vi definerede i Definition 12.1.1.

Definition 12.2.3

Givet reelle funktioner $f_1(t), \ldots, f_n(t)$, et reelt tal t_0 og reelle tal $y_1, \ldots, y_n$, således at $f_i(t_0) = y_i$ for $i = 1, \ldots, n$. Da siges funktionerne $f_1(t), \ldots, f_n(t)$ at opfylde *begyndelsesværdibetingelserne* $f_i(t_0) = y_i$ for $i = 1, \ldots, n$.

Det viser sig, at systemet i Ligning (12.4) har netop én løsning, der opfylder begyndelsesværdibetingelserne som angivet i Definition 12.2.3. At bestemme denne løsning kan gøres ved først at bestemme den fuldstændige løsning til systemet i Ligning (12.4) og derefter at bestemme værdierne af konstanterne $c_1, \ldots, c_n$, der forekommer i den fuldstændige løsning, således at begyndelsesværdibetingelserne opfyldes. Vi giver et lille eksempel.

Eksempel 12.2.4

Lad os betragte det samme system af differentialligninger som i Eksempel 12.2.3. Der så vi, at den fuldstændige løsning var givet ved

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} \\ c_2e^{2t} \\ c_3e^t + c_4e^{-t} \\ c_3e^t - c_4e^{-t} \end{bmatrix},$$

hvor $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$.

Spørgsmål: Bestem den løsning, der opfylder begyndelsesværdibetingelserne $f_1(0) = 1$, $f_2(0) = 2$, $f_3(0) = 3$ og $f_4(0) = 4$.

Svar: Ved at sætte $t = 0$ i den fuldstændige løsning og benytte de givne begyndelsesværdibetingelser, får vi, at konstanterne c_1, c_2, c_3 og c_4 skal opfylde

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 + c_4 \\ c_3 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dette medfører, at

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 + c_4 \\ c_3 - c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

Derfor er den løsning, vi leder efter, følgende:

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ (7e^t - e^{-t})/2 \\ (7e^t + e^{-t})/2 \end{bmatrix}.$$

Vi vender nu tilbage til studiet af systemet i Ligning (12.4). Kravet i Sætning 12.2.3 om, at der eksisterer en basis af egenvektorer, kan risikere ikke at være opfyldt. Det kan for eksempel ske, hvis det karakteristisk polynomium $p_{\mathbf{A}}(Z)$ ikke kan skrives som et produkt af polynomier af grad én. Med andre ord: $p_{\mathbf{A}}(Z)$ kan have komplekse, ikke-reelle rødder. Den følgende sætning udvider Sætning 12.2.3, så sådanne scenarier er dækket ind.

Sætning 12.2.5

Lad $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ være en matrix, og lad $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ være en ordnet basis for $\mathbb{C}^n$ bestående af egenvektorer for $\mathbf{A}$, der tilhører (muligvis ikke-reelle) egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da har det homogene system af ODE'er i Ligning (12.4) over de komplekse tal den fuldstændige løsning

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \cdot \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}, \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}.$$

Bevis. Vi udelader detaljerne i beviset og nævner blot, at beviset praktisk talt er identisk med beviserne for Sætning 12.2.3 og Korollar 12.2.4. Den eneste forskel er, at vi nu arbejder over de komplekse tal. Bemærk, at Lemma 12.1.3 garanterer, at $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ også for $\lambda \in \mathbb{C}$. $\square$

Antag nu, at $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, men at dens karakteristiske polynomium $p_{\mathbf{A}}(Z)$ har komplekse rødder. Vi kunne betragte $\mathbf{A}$ som en matrix i $\mathbb{C}^{n \times n}$ og anvende Sætning 12.2.5 til at bestemme den fuldstændige løsning. Problemet med dette vil dog være, at vi så finder den fuldstændige løsning til Ligning 12.4 bestående af komplekse funktioner med reelt input. Man er ofte mere interesseret i en fuldstændig løsning af reelle funktioner i stedet. Heldigvis kan dette opnås med nogle få tricks. Det vigtigste trick er, at da $p_{\mathbf{A}}(Z)$ har koefficienter i $\mathbb{R}$, hvis $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, så forekommer alle ikke-reelle rødder i par: hvis $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ er en rod, så er også $\overline{\mu} \in \mathbb{C}$ en rod, hvor $\overline{\mu}$ betegner den komplekst konjugerede af μ (se Lemma 4.3.3). Specifikt kan de reelle rødder i $p_{\mathbf{A}}(Z)$ arrangeres på formen $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ og de komplekse, ikke-reelle rødder på formen $\mu_1, \ldots, \mu_s, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_s$. Derfor har vi $n = r + 2s$, hvor vi blot gentager en rod m gange, hvis den forekommer med multiplicitet m. Lad os illustrere dette med et eksempel.

Eksempel 12.2.5

Antag, at $p_{\mathbf{A}}(Z) = (Z-1) \cdot (Z-2)^3 \cdot (Z^2+1)^2$ for en matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$. Da er rødderne i dette polynomium 1, 2 med multiplicitet 3 og i samt $-i$, begge med multiplicitet 2. Der er to reelle rødder, nemlig 1 og 2, men hvis vi betragter disse rødder med deres multiplicitet, skal vi gentage roden 2 tre gange. Derfor er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 2$ og $\lambda_4 = 2$. Der er to komplekse, ikke-reelle rødder i og $-i$, som begge skal gentages to gange. Derfor har vi $\mu_1 = i$ og $\mu_2 = i$ samt deraf også $\overline{\mu}_1 = -i$ og $\overline{\mu}_2 = -i$. I dette tilfælde har vi altså $r = 3$ og $s = 2$.

For at kunne beskrive den fuldstændige løsning til Ligning (12.4) i tilfælde af ikke-reelle rødder i $p_{\mathbf{A}}(Z)$, vil det være praktisk at definere den komplekst konjugerede af en vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$: hvis $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, så er $\overline{\mathbf{w}} = (\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n)$. Pointen her er, at hvis $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, og $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w} = \mu \cdot \mathbf{w}$ for nogle $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ og $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, så ser vi, når vi tager den komplekst konjugerede (og udnytter, at elementerne i $\mathbf{A}$ er reelle tal), at $\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{w}} = \overline{\mu} \cdot \overline{\mathbf{w}}$. Med dette in mente medfører Sætning 12.2.5 følgende:

Korollar 12.2.6

Antag, at $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, og at rødderne i dets karakteristiske polynomium $p_{\mathbf{A}}(Z)$ er arrangeret med multiplicitet som $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ og $\mu_1, \ldots, \mu_s, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_s$, hvor $\mu_1, \ldots, \mu_s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Antag yderligere, at der eksisterer vektorer $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$ for $i = 1, \ldots, s$ og $\mathbf{w}_j \in \mathbb{C}^n$ for $j = 1, \ldots, s$, således at følgende er opfyldt:

(i) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}_i = \lambda_i \cdot \mathbf{v}_i$ for $i = 1, \ldots, r$,

(ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{w}_j = \mu_j \cdot \mathbf{w}_j$ for $j = 1, \ldots, s$,

(iii) vektorerne $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s, \overline{\mathbf{w}}_1, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_s$ danner en ordnet basis for $\mathbb{C}^n$.

Så har det homogene system af ODE'er i Ligning (12.4) den fuldstændige løsning

$$c_1 \cdot \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_r \cdot \mathbf{v}_r e^{\lambda_r t} + c_{r+1} \cdot \mathrm{Re}(\mathbf{w}_1 e^{\mu_1 t}) + \cdots + c_{r+s} \cdot \mathrm{Re}(\mathbf{w}_s e^{\mu_s t}) + \\ c_{r+s+1} \cdot \mathrm{Im}(\mathbf{w}_1 e^{\mu_1 t}) + \cdots + c_n \cdot \mathrm{Im}(\mathbf{w}_s e^{\mu_s t}), \quad c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Bevis. Når matricen $\mathbf{A}$ opfattes som en matrix over $\mathbb{C}$, er egenværdierne af $\mathbf{A}$ givet ved

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \ldots, \mu_s, \overline{\mu}_1, \ldots, \overline{\mu}_s.$$

Derfor medfører Sætning 12.2.5, at

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathbf{v}_r e^{\lambda_r t}, \mathbf{w}_1 e^{\mu_1 t}, \ldots, \mathbf{w}_s e^{\mu_s t}, \overline{\mathbf{w}}_1 e^{\overline{\mu}_1 t}, \ldots, \overline{\mathbf{w}}_s e^{\overline{\mu}_s t}$$

danner en basis for løsningerne til Ligning (12.4), når man arbejder over $\mathbb{C}$. For at opnå en basis for denne mængde løsninger, når man arbejder over $\mathbb{R}$, justerer vi basen. Først og fremmest er løsningerne $\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{v}_r e^{\lambda_r t}$ allerede reelle funktioner, så ingen ændring er nødvendig for disse. Givet et par af komplekse funktioner med reelt input som løsninger, $\mathbf{w}_j e^{\mu_j t}$ og $\overline{\mathbf{w}}_j e^{\overline{\mu}_j t}$ for et j, kan vi erstatte dette par med parret

$$\frac{\mathbf{w}_j e^{\mu_j t} + \overline{\mathbf{w}}_j e^{\overline{\mu}_j t}}{2} = \mathrm{Re}(\mathbf{w}_j e^{\mu_j t}) \quad \text{og} \quad \frac{\mathbf{w}_j e^{\mu_j t} - \overline{\mathbf{w}}_j e^{\overline{\mu}_j t}}{2i} = \mathrm{Im}(\mathbf{w}_j e^{\mu_j t}).$$

Da $\mathrm{Re}(\mathbf{w}_j e^{\mu_j t})$ og $\mathrm{Im}(\mathbf{w}_j e^{\mu_j t})$ beskriver reelle funktioner, får vi derfor en basis for alle reelle funktioner, som er løsninger til Ligning (12.4), fra de n løsninger

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, \mathbf{v}_r e^{\lambda_r t}, \mathrm{Re}(\mathbf{w}_1 e^{\mu_1 t}), \dots, \mathrm{Re}(\mathbf{w}_s e^{\mu_s t}), \mathrm{Im}(\mathbf{w}_1 e^{\mu_1 t}), \dots, \mathrm{Im}(\mathbf{w}_s e^{\mu_s t}).$$

□

Det første punkt i Korollar 12.2.6 betyder blot, at vektoren $\mathbf{v}_i$ er en egenvektor for $\mathbf{A}$ med egenværdi λ_i. Det andet punkt betyder, at hvis vi arbejdede over det komplekse tallegeme $\mathbb{C}$ i stedet for $\mathbb{R}$, så ville $\mathbf{w}_j$ være en egenvektor med egenværdi μ_j. I så fald kan det vises, at $\overline{\mathbf{w}}_j$ også er en egenvektor for $\mathbf{A}$ med egenværdi $\overline{\mu}_j$. Endelig betyder det tredje punkt, at der findes en basis for $\mathbb{C}^n$, der består af egenvektorer for $\mathbf{A}$, når man betragter $\mathbf{A}$ som en matrix i $\mathbb{C}^{n \times n}$. Derfor kan de tre punkter samlet omformuleres som: når man betragter $\mathbf{A}$ som en matrix i $\mathbb{C}^{n \times n}$, er matricen $\mathbf{A}$ diagonalisérbar.

Korollar 12.2.6 kan umiddelbart virke kompliceret, men det er praktisk at have ved hånden i konkrete tilfælde. Lad os derfor se på et eksempel.

Eksempel 12.2.6

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Formålet med dette eksempel er at vise, hvordan man bestemmer den fuldstændige løsning til det homogene system af ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{12.9}$$

For at være mere præcis ønsker vi at finde den fuldstændige løsning bestående af reelle funktioner.

Først udregner vi, at

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = \det(\mathbf{A} - Z\mathbf{I}_2) = \det\left(\begin{bmatrix} -Z & 13 \\ -1 & 4-Z \end{bmatrix}\right) = (-Z)\cdot(4-Z) - 13\cdot(-1) = Z^2 - 4Z + 13.$$

Dette polynomium har rødderne $2+3i$ og $2-3i$ (se Sætning 4.2.1). Da rødderne ikke er reelle, arbejder vi over de komplekse tal for nu. Først finder vi en kompleks egenvektor tilhørende den ikke-reelle rod $2+3i$. Vi gør dette ved at bestemme den reducerede trappeform af matricen $\mathbf{A}-(2+3i)\mathbf{I}_2$:

$$\mathbf{A}-(2+3i)\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} -2-3i & 13 \\ -1 & 2-3i \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2-3i \\ -2-3i & 13 \end{bmatrix} \underset{R_1 \leftarrow -R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2+3i \\ -2-3i & 13 \end{bmatrix} \underset{R_2 \leftarrow R_2+(2+3i)R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2+3i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nu ser vi, at E_{2+3i}, altså kernen af $\mathbf{A}-(2+3i)\mathbf{I}_2$ når den betragtes som en matrix i $\mathbb{C}^{2\times 2}$, er lig med $\{(v_1,v_2)\in\mathbb{C}^2 \mid v_1=(2-3i)v_2\}$. Derfor er en basis for E_{2+3i} for eksempel givet ved

$$\left\{\begin{bmatrix} 2-3i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Tilsvarende viser man, at en mulig basis for E_{2-3i} er

$$\left\{\begin{bmatrix} 2+3i \\ 1 \end{bmatrix}\right\},$$

men vi har faktisk ikke brug for denne anden basis. Nu følger vi opskriften beskrevet i Korollar 12.2.6, og vi udregner først

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2-3i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(2+3i)t} &= \begin{bmatrix} 2-3i \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}(\cos(3t)+i\sin(3t)) \\
&= \begin{bmatrix} (2-3i)e^{2t}(\cos(3t)+i\sin(3t)) \\ e^{2t}(\cos(3t)+i\sin(3t)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos(3t)+3e^{2t}\sin(3t)+i(2e^{2t}\sin(3t)-3e^{2t}\cos(3t)) \\ e^{2t}\cos(3t)+ie^{2t}\sin(3t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Derfor er

$$\mathrm{Re}\left(\begin{bmatrix} 2-3i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(2+3i)t}\right) = \begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos(3t)+3e^{2t}\sin(3t) \\ e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix}$$

og

$$\mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 2-3i \\ 1 \end{bmatrix} e^{(2+3i)t}\right) = \begin{bmatrix} 2e^{2t}\sin(3t)-3e^{2t}\cos(3t) \\ e^{2t}\sin(3t) \end{bmatrix}.$$

Ved hjælp af Korollar 12.2.6 kan vi konkludere, at den fuldstændige løsning til systemet i Ligning (12.9) er givet ved

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = c_1\cdot\begin{bmatrix} 2e^{2t}\cos(3t)+3e^{2t}\sin(3t) \\ e^{2t}\cos(3t) \end{bmatrix} + c_2\cdot\begin{bmatrix} 2e^{2t}\sin(3t)-3e^{2t}\cos(3t) \\ e^{2t}\sin(3t) \end{bmatrix},$$

hvor $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

Vi har nu beskrevet metoder til at bestemme den fuldstændige løsning, når matricen $\mathbf{A}$ er diagonalisérbar over $\mathbb{R}$ (Sætning 12.2.3), og når den er diagonalisérbar over $\mathbb{C}$ (Korollar 12.2.6). Hvis matricen ikke er diagonalisérbar, ikke engang over $\mathbb{C}$, kan det være noget sværere at løse; der findes en formel for den fuldstændige løsning i et sådant scenarie, men dette ligger udenfor rammerne af denne tekst. Vi vil dog vise et eksempel på et særtilfælde, der berører dette problem.

Eksempel 12.2.7

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ med } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Denne matrix har λ som egenværdi med algebraisk multiplicitet to og geometrisk multiplicitet ét. Derfor gælder Sætning 12.2.3 ikke, da E_λ er endimensionel med en basis udgjort af for eksempel vektoren $(1, 0)$.

Vi ønsker at bestemme den fuldstændige løsning til systemet af ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}. \tag{12.10}$$

Skilles systemet ad, har vi at gøre med de to ODE'er $f_1'(t) = \lambda \cdot f_1(t) + f_2(t)$ og $f_2'(t) = \lambda \cdot f_2(t)$. En løsning findes ved at sætte $f_2(t) = 0$, altså nulfunktionen, og $f_1(t) = e^{\lambda t}$. Med andre ord: vektoren af funktioner $(e^{\lambda t}, 0)$ er en løsning til systemet i Ligning (12.10). En anden løsning kan findes ved at vælge $f_2(t) = e^{\lambda t}$. Da skal $f_1(t)$ opfylde den lineære inhomogene ODE $f_1'(t) = \lambda \cdot f_1(t) + e^{\lambda t}$. Ved at benytte Korollar 12.1.2, har vi, at $f_1(t) = e^{\lambda t} \int e^{-\lambda t} e^{\lambda t} dt = e^{\lambda t} t + c \cdot e^{\lambda t}$, hvor $c \in \mathbb{R}$. Ved at vælge $c = 0$, ser vi, at $(f_1(t), f_2(t)) = (te^{\lambda t}, e^{\lambda t})$ også er en løsning til systemet i Ligning (12.10). Da vi nu har fundet to lineært uafhængige løsninger, kan vi konkludere, at den fuldstændige løsning til systemet i Ligning (12.10) er givet ved

$$\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda t} \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

12.3 Relationen mellem systemer af lineære førsteordens ODE'er og lineære andenordens ODE'er

Som en anvendelse af teorien i det forrige afsnit vil vi nu kort betragte en helt særlig type af andenordens ODE'er:

Definition 12.3.1

Lad $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ være konstanter og $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en funktion. Da er en lineær andenordens ODE med konstante koefficienter en ODE på formen

$$f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = q(t). \tag{12.11}$$

Funktionen $q(t)$ kaldes på engelsk ODE'ens *forcing function*. Hvis denne forcing function $q(t)$ er nulfunktionen, kaldes ODE'en *homogen*, og ellers kaldes den *inhomogen*.

Som nævnt i Definition 12.1.2 opstiller man ofte begyndelsesværdibetingelser på formen $f(t_0) = y_0, f'(t_0) = y_1$ for en given $t_0 \in \mathbb{R}$ og givne værdier $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$. Man kan vise, at hvis $q(t)$ er en differentiabel funktion, så har ODE'en i Ligning (12.11) netop én løsning, der opfylder en given begyndelsesværdibetingelse. For ODE'er som i Ligning (12.11) er en måde at finde denne løsning på først at bestemme dens fuldstændige løsning. Vi vil forklare, hvordan man gør dette, i dette afsnit ved hjælp af teorien fra det forrige afsnit. Følgende sætning indeholder nøgleelementet:

Sætning 12.3.1

Lad en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet. Hvis f er en løsning til ODE'en

$$f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = q(t), \tag{12.12}$$

så er vektoren af funktioner $(f(t), f'(t))$ en løsning til systemet af ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ q(t) \end{bmatrix}. \tag{12.13}$$

Omvendt, hvis $(f_1(t), f_2(t))$ er en løsning til systemet af ODE'er i Ligning (12.13), så er $f_1(t)$ en løsning til ODE'en i Ligning (12.12).

Bevis. Dette overlades til læseren. □

Eksempel 12.3.1

En funktion $f(t)$ er en løsning til den lineære andenordens ODE $f''(t) + 5f'(t) + 6f(t) = 0$, hvis og kun hvis vektoren af funktioner $(f(t), f'(t))$ er en løsning til systemet af ODE'er

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}.$$

Sætning 12.3.1 har følgende fine konsekvens for strukturen af løsningen til en lineær andenordens ODE.

Korollar 12.3.2

Lad en inhomogen lineær andenordens ODE

$$f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = q(t)$$

være givet, og antag, at $f_p(t)$ er en partikulær løsning til denne differentialligning. Da er enhver anden løsning $f(t)$ på formen $f_p(t) + f_h(t)$, hvor $f_h(t)$ er en løsning til den tilsvarende homogene ODE

$$f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0. \tag{12.14}$$

Bevis. Dette følger ved at kombinere Sætningerne 12.2.1 og 12.3.1. □

For at anvende Sætning 12.3.1 til at bestemme løsningen til en lineær andenordens ODE, er det nødvendigt at undersøge egenværdierne og egenvektorerne af den matrix, der optræder i sætningen. Undersøgelse af dens karakteristiske polynomium er derfor et vigtigt første skridt. Vi har

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} - Z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \det\left(\begin{bmatrix} -Z & 1 \\ -a_0 & -a_1 - Z \end{bmatrix}\right) \\ &= (-Z)\cdot(-a_1 - Z) - 1\cdot(-a_0) = Z^2 + a_1 Z + a_0. \end{aligned}$$

Dette motiverer for følgende definition:

Definition 12.3.2

Polynomiet

$$Z^2 + a_1 Z + a_0$$

kaldes *det karakteristiske polynomium* for ODE'en

$$f''(t) + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0.$$

Med denne definition på plads kan vi helt eksplicit løse en homogen lineær andenordens ODE. Der er tre scenarier at skelne imellem afhængigt af, om polynomiet har to forskellige, reelle rødder, to komplekst konjugerede, ikke-reelle rødder, eller en reel rod med multiplicitet to (se Sætning 4.2.1).

Scenarie 1: Polynomiet $Z^2 + a_1 Z + a_0$ har to forskellige, reelle rødder. Hvis $Z^2 + a_1 Z + a_0$ har to forskellige, reelle rødder, betyder det, at dets diskriminant $D = a_1^2 - 4a_0$ er positiv, og at de reelle rødder er $\lambda_1 = \dfrac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}$ og $\lambda_2 = \dfrac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}$. Vi kunne nu benytte Sætningerne 12.3.1 og 12.2.3 til at bestemme den fuldstændige løsning til ODE'en i Ligning (12.14), men en direkte tilgang vil være hurtigere. Med vores indsigt i teorien om systemer af ODE'er forventer vi, at den fuldstændige løsning vil involvere funktionerne $e^{\lambda_1 t}$ og $e^{\lambda_2 t}$. Vi hævder derfor, at både $e^{\lambda_1 t}$ og $e^{\lambda_2 t}$ er løsninger til ODE'en i Ligning (12.14). For eksempel ser vi, at

$$\begin{aligned} (e^{\lambda_1 t})'' + a_1(e^{\lambda_1 t})' + a_0 e^{\lambda_1 t} &= \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + a_0 e^{\lambda_1 t} \\ &= (\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0) e^{\lambda_1 t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

hvor vi i den sidste lighed har udnyttet, at λ_1 er en rod i polynomiet $Z^2 + a_1 Z + a_0$. På meget lignende måde viser man, at funktionen $e^{\lambda_2 t}$ også er en løsning. Hvis $D = a_1^2 - 4a_0 > 0$, vil den fuldstændige løsning til ODE'en i Ligning (12.14) derfor være:

$$c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = c_1 \cdot e^{\left(\frac{-a_1 + \sqrt{D}}{2}\right)t} + c_2 \cdot e^{\left(\frac{-a_1 - \sqrt{D}}{2}\right)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{12.15}$$

Scenarie 2: Polynomiet $Z^2 + a_1 Z + a_0$ har to ikke-reelle rødder. I dette tilfælde er diskriminanten $D = a_1^2 - 4a_0$ negativ, og rødderne i $Z^2 + a_1 Z + a_0$ er $\lambda_1 = \dfrac{-a_1 + i\sqrt{|D|}}{2}$ og $\lambda_2 = \dfrac{-a_1 - i\sqrt{|D|}}{2}$. Meget lignende det forrige scenarie kan man vise, denne gang ved hjælp af Lemma 12.1.3, at både $e^{\lambda_1 t}$ og $e^{\lambda_2 t}$ er komplekse løsninger til ODE'en i Ligning (12.14). For at finde reelle løsninger tager vi blot realdelen og imaginærdelen af en af disse løsninger, inspireret af hvad vi gjorde i Korollar 12.2.6. Vi får

$$\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t}) = \mathrm{Re}(e^{(\frac{-a_1 + i\sqrt{|D|}}{2})t}) = e^{(\frac{-a_1}{2})t} \cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2} t\right)$$

og på lignende måde

$$\mathrm{Im}(e^{\lambda_1 t}) = \mathrm{Im}(e^{(\frac{-a_1 + i\sqrt{|D|}}{2})t}) = e^{(\frac{-a_1}{2})t} \sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2} t\right).$$

Hvis $D = a_1^2 - 4a_0 < 0$, vil den fuldstændige løsning til ODE'en i Ligning (12.14) derfor være:

$$c_1 \cdot e^{(\frac{-a_1}{2})t} \cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2} t\right) + c_2 \cdot e^{(\frac{-a_1}{2})t} \sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2} t\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{12.16}$$

Scenarie 3: Polynomiet $Z^2 + a_1 Z + a_0$ har en reel rod med multiplicitet to. I dette tilfælde er diskriminanten $D = a_1^2 - 4a_0$ lig nul, og dobbeltroden er givet ved $\lambda = -a_1/2$. Som i de forrige scenarier kan man direkte vise, at $e^{\lambda t}$ er en løsning til ODE'en i Ligning (12.14), men i dette scenarie mangler der endnu en løsning. Heldigvis kan vi igen få inspiration fra, hvad vi har været igennem med systemer af lineære ODE'er. I Eksempel 12.2.7 var vi i den situation, at den algebraiske multiplicitet af en egenværdi var to, men dens geometriske multiplicitet kun var én. Vi er i en lignende situation her. Hvis $D = 0$, så har matricen $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix}$, der forekommer i Sætning 12.3.1, egenværdien λ med algebraisk multiplicitet to, men man kan vise, at dens geometriske multiplicitet kun er én. Da funktionen $te^{\lambda t}$ dukkede op i Eksempel 12.2.7, vil det være naturligt at prøve at se, om denne funktion er en løsning til ODE'en i Ligning (12.14). Og det er den faktisk:

$$\begin{aligned}
(te^{\lambda t})'' + a_1(te^{\lambda t})' + a_0 te^{\lambda t} &= (e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t})' + a_1(e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t}) + a_0 te^{\lambda t} \\
&= (\lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + t\lambda^2 e^{\lambda t}) + a_1(e^{\lambda t} + t\lambda e^{\lambda t}) + a_0 te^{\lambda t} \\
&= (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)te^{\lambda t} + (2\lambda + a_1)e^{\lambda t} \\
&= (2\lambda + a_1)e^{\lambda t} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

hvor vi i de sidste to ligheder har benyttet, at $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$, og $\lambda = -a_1/2$. Vi konkluderer, at hvis $D = a_1^2 - 4a_0 = 0$, så er den fuldstændige løsning til ODE'en i Ligning (12.14):

$$c_1 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot te^{\lambda t} = c_1 \cdot e^{\left(\frac{-a_1}{2}\right)t} + c_2 \cdot t \cdot e^{\left(\frac{-a_1}{2}\right)t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{12.17}$$

Vi afslutter afsnittet med en gennemgang af nogle flere eksempler.

Eksempel 12.3.2

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) = 0$.

Svar: Det karakteristiske polynomium for differentialligningen er $Z^2 - 5Z + 6$. Dette polynomium har en diskriminant lig 1 og derfor to forskellige reelle rødder. Udregnes disse rødder på den sædvanlige måde får man, at de er 2 og 3.

Ved at benytte Ligning (12.15) har vi derefter følgende fuldstændige løsning:

$$f(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 12.3.3

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = 0$.

Svar: Det karakteristiske polynomium for differentialligningen er $Z^2 - 4Z + 4$, som har en diskriminant på nul. Mere præcist har det roden 2 med multiplicitet to. Ligning (12.17) fortæller nu, at den fuldstændige løsning, vi søger, er givet ved:

$$f(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Eksempel 12.3.4

Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen $f''(t) - 4f'(t) + 13f(t) = 0$.

Svar: I dette tilfælde er det karakteristiske polynomium for differentialligningen $Z^2 - 4Z + 13$, som har en negativ diskriminant, nemlig $D = (-4)^2 - 4 \cdot 13 = -36$. Derfor har det karakteristiske polynomium to ikke-reelle rødder, som viser sig at være $2 + 3i$ og $2 - 3i$. Ifølge Ligning (12.16) er den ønskede fuldstændige løsning:

$$f(t) = c_1 e^{2t} \cos(3t) + c_2 e^{2t} \sin(3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Afslutningsvis giver vi nogle eksempler på inhomogene lineære andenordens differentialligninger.

Eksempel 12.3.5

Bestem den fuldstændige løsning til følgende differentialligninger:

1. $f''(t) - 5f'(t) + 6f(t) = t$. Det er givet, at der findes en partikulær løsning på formen $f(t) = at + b$ med $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $f''(t) - 4f'(t) + 4f(t) = e^t$. Det er givet, at $f(t) = e^t$ er en løsning.
3. $f''(t) - 4f'(t) + 13f(t) = 1$. Det er givet, at der findes en løsning på formen $f(t) = a$ med $a \in \mathbb{R}$.

Svar:

Jævnfør Korollar 12.4.2 og de tidligere eksempler er det nok at finde en partikulær løsning til hver af differentialligningerne.

1. Lad os forsøge at finde en partikulær løsning på formen $f(t) = at + b$ med $a, b \in \mathbb{R}$. Ved at indsætte dette i differentialligningen ser vi, at $0 - 4a + 4(at + b) = t$. Derfor får vi $4a = 1$ og $-4a + 4b = 0$. Vi ser, at $f(t) = t/4 + 1/4$ er en partikulær løsning. Ved at benytte Eksempel 12.3.2 og Korollar 12.4.2 konkluderer vi, at den fuldstændige løsning er givet ved:

$$f(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{4} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Da vi er givet en partikulær løsning, kan vi finde den fuldstændige løsning direkte fra Eksempel 12.3.3 ved at benytte Korollar 12.4.2. Resultatet er:

$$f(t) = e^t + c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Først finder vi en partikulær løsning på formen $f(t) = a$. Ved at indsætte dette i differentialligningen ser vi, at $0 - 4 \cdot 0 + 13a = 1$, og derfor er $f(t) = 1/13$ en partikulær løsning. Ligesom tidligere kombinerer vi nu denne partikulære løsning med den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ODE givet i Eksempel 12.3.4, og vi får følgende som den ønskede fuldstændige løsning til den givne inhomogene ligning:

$$f(t) = \frac{1}{13} + c_1 e^{2t}\cos(3t) + c_2 e^{2t}\sin(3t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

12.4 Relationen mellem systemer af lineære førsteordens ODE'er og lineære differentialligninger af højere orden

De samme ideer, som blev anvendt i det foregående afsnit, kan også anvendes på visse n'te-ordens differentialligninger. For fuldstændighedens skyld viser vi i dette afsnit, hvordan det kan foregå. Dette afsnit er ikke obligatorisk læsning og er kun ment som ekstra materiale til læsere, der ønsker at vide lidt mere. Vi starter på samme måde som for lineære andenordens ODE'er.

Definition 12.4.1

Lad n være et naturligt tal, $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ konstanter og $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en funktion. En lineær n'te-ordens ODE med konstante koefficienter er en ODE på formen

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = q(t). \tag{12.18}$$

Funktionen $q(t)$ kaldes på engelsk ODE'ens *forcing function*. Hvis denne forcing function $q(t)$ er nulfunktionen, kaldes ODE'en *homogen*, og ellers kaldes den *inhomogen*.

Som nævnt i Definition 12.1.2 arbejdes der ofte med begyndelsesværdibetingelser på formen $f(t_0) = y_0, f'(t_0) = y_1, \ldots, f^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ for et givet $t_0 \in \mathbb{R}$ og givne værdier $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Man kan vise, at hvis $q(t)$ er en differentiabel funktion, så har ODE'en i Ligning (12.18) netop én løsning, der opfylder en given begyndelsesværdibetingelse. For

ODE'er som i Ligning (12.18) er en måde at finde denne løsning på at bestemme dens fuldstændige løsning først. Vi vil i dette afsnit beskrive, hvordan dette kan gøres.

Den primære ide er at relatere en løsning til en lineær n'te-ordens ODE med konstante koefficienter til en løsning til et passende valgt system af lineære førsteordens ODE'er.

Sætning 12.4.1

Lad en reel funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet. Hvis f er en løsning til ODE'en

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = q(t), \tag{12.19}$$

så er vektoren af funktioner $(f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t))$ en løsning til følgende system af ODE'er:

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(t) \end{bmatrix}. \tag{12.20}$$

Omvendt, hvis $(f_1(t), \ldots, f_n(t))$ er en løsning til systemet af ODE'er i Ligning (12.20), så er $f_1(t)$ en løsning til ODE'en i Ligning (12.19).

Bevis. Dette overlades til læseren. □

Sætning 12.4.1 medfører, at man kan anvende al den teori, vi har udviklet i det forrige afsnit, når man undersøger en ODE som Ligning (12.18). For eksempel kan vi konkludere følgende.

Korollar 12.4.2

Lad en inhomogen lineær n'te-ordens ODE

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = q(t)$$

være givet, og antag, at $f_p(t)$ er en partikulær løsning til denne differentialligning. Da er enhver anden løsning $f(t)$ på formen $f_p(t) + f_h(t)$, hvor $f_h(t)$ er en løsning til den tilsvarende homogene ODE

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 \cdot f'(t) + a_0 \cdot f(t) = 0. \tag{12.21}$$

Bevis. Dette følger ved at kombinere Sætningerne 12.2.1 og 12.4.1. □

Som for systemer af n lineære førsteordens ODE'er kan man også her vise, at løsningsmængden til en homogen lineær n'te-ordens ODE udgør et vektorrum af dimension n. For at beskrive den fuldstændige løsning skal man derfor finde n lineært uafhængige løsninger. Som med systemer af lineære førsteordens ODE'er er første skridt mod bestemmelse af den fuldstændige løsning til en lineær n'te-ordens ODE at finde den fuldstændige løsning til den tilsvarende homogene ODE. Hvis vi vil benytte Sætning 12.4.1, vil første skridt være at bestemme det karakteristiske polynomium for matricer på den form, der optræder i Sætning 12.4.1. Heldigvis findes der en praktisk formel for de karakteristiske polynomier af sådanne matricer. Den virker endda over ethvert legeme $\mathbb{F}$.

Lemma 12.4.3

Lad $\mathbb{F}$ være et legeme, $n \geq 2$ et heltal og $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$. Da er det karakteristiske polynomium for matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

lig med

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = (-1)^n \cdot (Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0).$$

Bevis. Vi beviser dette ved induktion på n for $n \neq 2$. Hvis $n = 2$, kan vi direkte se, at

$$p_{\mathbf{A}}(Z) = \det\left(\begin{bmatrix} -Z & 1 \\ -a_0 & -a_1 - Z \end{bmatrix}\right) = (-Z) \cdot (-a_1 - Z) - 1 \cdot (-a_0) = Z^2 + a_1 Z + a_0.$$

Antag nu, at $n > 2$, og at resultatet er sandt for $n-1$. Udvikles determinanten af $\mathbf{A} - Z\mathbf{I}_n$ langs den første søjle får vi, at:

$$\det(\mathbf{A} - Z\mathbf{I}_n) = -Z \cdot \det\left(\begin{bmatrix} -Z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -Z & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -Z & 1 \\ -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} - Z \end{bmatrix}\right)$$
$$+ (-1)^n \cdot (-a_0) \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -Z & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -Z & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -Z & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Benyttes induktionshypotesen på den første determinant efter ligheden og Sætning 8.1.4 på den anden determinant får vi, at

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - Z\mathbf{I}_n) &= (-Z)\cdot(-1)^{n-1}\cdot(Z^{n-1+}a_{n-1}Z^{n-2} + \cdots + a_1) + (-1)^{n-1}\cdot(-a_0)\cdot 1 \\ &= (-1)^n\cdot(Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \ldots f a_1 Z + a_0).\end{aligned}$$

Dette fuldender induktionstrinnet. Dermed er lemmaet sandt for ethvert heltal $n \geq 2$. □

Bemærk, at matricen i Lemma 12.4.3 på engelsk kaldes en *companion matrix* for polynomiet $Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_0$. Lemma 12.4.3 medfører, at når den lineære n'te-ordens ODE i Ligning (12.18) skal løses, så er det første, man bør gøre, at finde rødderne i polynomiet $Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \ldots f a_1 Z + a_0$. Polynomiet

$$Z^n + a_{n-1}Z^{n-1} + \cdots + a_1 Z + a_0$$

kaldes ofte *det karakteristiske polynomium* for ODE'en

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1}\cdot f^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\cdot f'(t) + a_0\cdot f(t) = 0.$$

Vi kunne fortsætte med at udvikle teorien om lineære n'te-ordens ODE'er yderligere, men i denne tekst vil vi afslutte vores studier af differentialligninger her.