

Danmarks Tekniske Universitet

Side 1 af 6 sider

Skriftlig eksamen, d. 7. december 2025

Kursusnavn: Matematik 1a (Polyteknisk grundlag)
Eksamensvarighed: 4 timer

Kursusnr. 01001

Hjælpemidler: Skriftlige hjælpemidler tilladt

Vægtning: Opgavesættet består af to dele: en MC-del, MC-Opgave 1-8, og en del hvor svarene skal begrundes, Opgave 9-15.

De to dele i denne eksamen vægtes ens. De enkelte opgaver i MC delen vægtes ens, et forkert eller manglende svar giver 0 point. I den anden del vægtes alle delspørgsmål ens.

Yderligere information: Kun svarene må angives i MC-opgaverne. I den anden del af prøven skal alle svar være motiverede, og mellemregninger skal angives i passende omfang.

MC-Opgave 1 Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hvilket af nedenstående tal angiver determinanten af $\mathbf{A}$?

- 1a) -5 1b) 1 1c) 0 1d) 6 1e) -7 1f) 3 1g) 10

MC-Opgave 2 Givet den homogene andenordens differentiaalligning:

$$3f''(t) - 6f'(t) + 15f(t) = 0.$$

Hvilket af nedenstående udtryk er en løsning til differentiaalligningen?

- 2a) $e^{2t} \sin(t)$ 2b) $e^t \cos(2t)$ 2c) $\sin(2t) - \cos(2t)$ 2d) 1
2e) $e^{3t}(\cos(t) + 2\sin(t))$ 2f) $5e^{2t} \sin(t)$ 2g) $e^{-t} \cos(-2t)$

MC-Opgave 3 Givet polynomiet

$$p(Z) = Z^3 - 2Z^2 - Z + 7.$$

Hvilket af nedenstående tal angiver resten ved division med $Z + 1$?

- 3a) 2 3b) -2 3c) 0 3d) 5 3e) -5 3f) 1 3g) -1

MC-Opgave 4 Hvilken af nedenstående 6 funktioner er bijektiv?

- 4a) $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \cos(x),$
4b) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \cos(x),$
4c) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x,$
4d) $f_4: [-1, 1] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto |x|,$
4e) $f_5: [0, \pi] \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \sin(x),$
4f) $f_6: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \cos(x).$

MC-Opgave 5 Givet matricen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}.$$

Det oplyses, at $\lambda = i$ er en egen værdi for $\mathbf{A}$.

Hvilken af nedenstående vektorer angiver en egenvektor hørende til egen værdien $\lambda = i$?

5a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 3-i \end{bmatrix}$, 5b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3-i \end{bmatrix}$, 5c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}$,

5d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 5e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, 5f) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3+i \end{bmatrix}$, 5g) $\begin{bmatrix} 1+i \\ 1+i \end{bmatrix}$.

MC-Opgave 6 Givet differentialligningssystemet

$$\begin{bmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \quad \text{hvor} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Desuden oplyses, at løsningen opfylder begyndelsesværdibetingelsen:

$$\begin{bmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Hvilken af nedenstående udtryk er en løsning til differentialligningssystemet med den givne begyndelsesværdi?

6a) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, 6b) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{bmatrix}$,

6c) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$, 6d) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11e^{-t} - 8e^{-2t} \\ 4e^{-2t} \end{bmatrix}$,

6e) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} + e^{2t} \\ 2e^{-t} + 2e^{2t} \end{bmatrix}$, 6f) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^t + e^{-2t} \\ 2e^t + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$,

6g) $\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^t \\ e^{-t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$.

MC-Opgave 7 En funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ er rekursivt givet ved

$$f(1) = 0, \quad f(2) = 1, \quad f(n) = 2f(n-1) + (f(n-2))^2, \quad n \geq 2.$$

Hvilket af nedenstående tal angiver $f(5)$?

- 7a) 12 7b) 13 7c) 14 7d) 15 7e) 16 7f) 17 7g) 18

MC-Opgave 8 Lad $L: V \rightarrow W$ være en lineær afbildning fra vektorrummet af polynomier af grad højst 2 til vektorrummet af polynomier af grad højst 1. Lad en ordnet basis for V være $\beta = (1, Z, Z^2)$ og en ordnet basis for W være $\gamma = (1, Z)$. Afbildningsmatricen for L er givet ved

$${}_r[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hvilket af nedenstående polynomier angiver værdien af $L(1 + Z + Z^2)$?

- 8a) $1 + Z$ 8b) Z 8c) 1 8d) $4Z$ 8e) 9 8f) $2 + 3Z$ 8g) $-1 - 3Z$

MULTIPLE CHOICE DEL SLUT, ANDEN HALVDEL STARTER PÅ NÆSTE SIDE

Opgave 9 Der defineres de komplekse tal $z_1 = -2 + 2i$ og $z_2 = 4 + 5i$.

- a) Skriv z_2/z_1 på rektangulær form og skriv z_1^4 på polær form.

Opgave 10 Der gives følgende reelle lineære ligningssystem i de fire ubekendte x_1, x_2, x_3 og x_4 :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 1 \end{cases}$$

- a) Bestem ligningssystemets fuldstændige løsning.

Opgave 11

- a) Er det logiske udsagn $(P \Leftrightarrow \neg Q) \wedge P$ logisk ækvivalent med det logiske udsagn $P \wedge (\neg Q)$?
- b) Der defineres mængden $S = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \cap \mathbb{Z}$. Er tallet -2 element i S ?

Opgave 12 Følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$ gives:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Find en ordnet basis for $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.
- b) Er den givne vektor $\mathbf{x}$ i $\text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$?

Opgave 13 Der gives følgende matrix: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

- a) Find en diagonalmatrix $\mathbf{D}$ og invertibel matrix $\mathbf{Q}$ således at $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$.

Opgave 14 Lad $V = \mathbb{R}^3$ og lad ε være den ordnede standardbasis for V . Ydermere vælges følgende ordnede basis for V :

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

For en lineær afbildning $L : V \rightarrow V$ er følgende afbildningsmatrix givet:

$${}_{\beta}[L]_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Angiv basisskiftmatrixerne ${}_{\varepsilon}[\text{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\beta}$ og ${}_{\beta}[\text{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\varepsilon}$.
- Bestem afbildningsmatricen ${}_{\varepsilon}[L]_{\varepsilon}$.

Opgave 15 En funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ er defineret rekursivt som følger:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = 1, \\ 2 \cdot f(n-1) + n - 1 & \text{hvis } n \geq 2. \end{cases}$$

- Vis med induktion efter n at $f(n) \geq 2^n$ for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$.

EKSAMEN SLUT