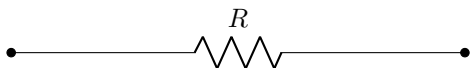


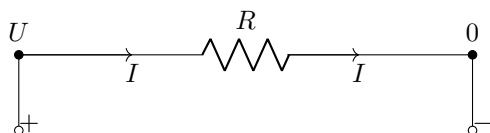
Temaøvelse 3.

I denne Temaøvelse skal du anvende teknikker fra den lineære algebra til at studere flowet af elektrisk strøm i et elektrisk netværk. I denne øvelse består et sådant netværk blot af "kanter", der forbinder to knudepunkter i netværket. En sådan kant kan bære på en vis elektrisk modstand. Den måde kanterne er sammensat på, udgør netværket, hvori en elektrisk strøm kan flyde. Det simplest mulige netværk har to knudepunkter forbundet af en kant:



Den angivne R er kantens modstand. Vi vil benytte os af SI-enheden Ohm (Ω) for elektrisk modstand. Hvis et batteri med spændingen U tilsluttes kantens knudepunkter, vil en elektrisk strøm I flyde fra batteriets $+$ -pol til $-$ -polen. SI-enheden for spænding er Volt (V), og for elektrisk strøm er den Ampere (A).

Hvis værdien af I er negativ, betyder det, at strømmen flyder i den modsatte retning af, hvad der er antaget. Knudepunktet, der er forbundet til $+$ -polen, har spændingen U , og knudepunktet forbundet til $-$ -polen har spændingen nul. Disse spændinger skrives direkte over knudepunktet på en tegning. Spændingsforskellen henover kanten er lig med U .



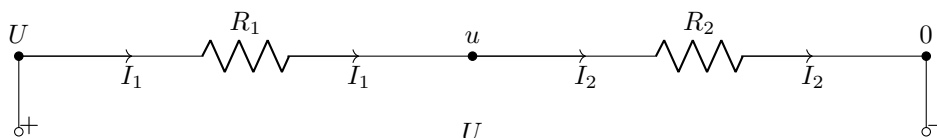
Størrelserne R , I og U opfylder Ohms lov:

$$U = I \cdot R. \quad (1)$$

Hvis et netværk består af mere end én kant, vil hvert knudepunkt have en bestemt spænding. Der vil derfor være en bestemt spændingsforskel over hver kant, som blot er forskellen mellem spændingerne i dens to knudepunkter. Hver kant vil også have en givet modstand, og der vil flyde en bestemt strøm igennem den, og Ohms lov gælder individuelt for hver kant.

En anden fysisk lov for elektriske netværk er kendt som Kirchhoffs strømlov. Et mellemknudepunkt i et elektrisk netværk er et knudepunkt, der ikke er direkte forbundet til $+$ - eller $-$ -polen på en elektrisk spændingskilde såsom et batteri. Kirchhoffs strømlov siger, at for ethvert mellemknudepunkt i et elektrisk netværk er summen af alle strømme, der løber ind i eller forlader knudepunktet, lig med nul. Med andre ord skal enhver strøm, der løber ind i et knudepunkt, også forlade det uden forsinkelse. Hvis et knudepunkt f.eks. ligger på fire kanter i et netværk, skal summen af de fire strømme gennem disse fire kanter være lig med nul. Når man beregner summen, er det vigtigt at have korrekt fortegn på strømmen: en strøm i en kant, der løber hen imod knudepunktet, skal have et positivt fortegn, mens en strøm væk fra knudepunktet skal have et negativt fortegn.

Lad os se på et lille eksempel, hvor vi har placeret to modstande i serie. Her er der præcis ét mellemknudepunkt. Spændingen i dette knudepunkt er angivet ved u .



Ohms lov anvendt på hver kant angiver simpelthen, at:

$$U - u = R_1 \cdot I_1 \quad \text{og} \quad u = R_2 \cdot I_2.$$

Da der kun er ét mellemknodepunkt, giver Kirchhoffs strømlov anledning til én ligning, nemlig:

$$I_1 - I_2 = 0.$$

I alle spørgsmålene nedenfor opfordres du til at benytte SymPy, når du skal løse systemer af lineære ligninger.

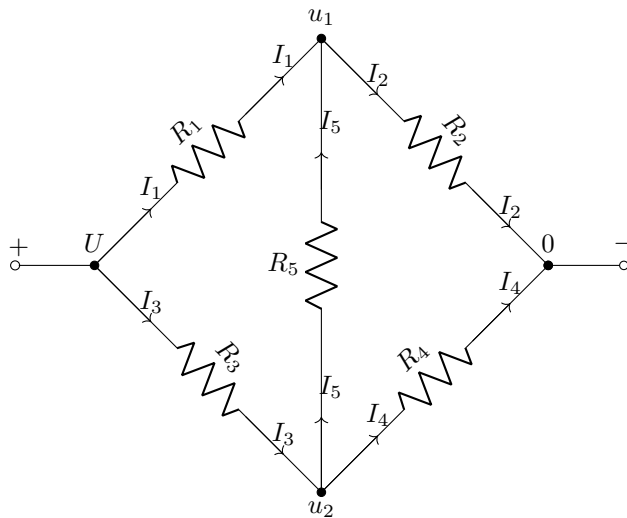
Spørgsmål 1

Betragt det elektriske netværk givet ovenfor med de to modstande.

- Antag, at $U = 12.6 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, og $R_2 = 7 \Omega$. Udregn u , I_1 og I_2 .
- Antag, at U , R_1 og R_2 ikke er givet. Udtryk u ved U , R_1 og R_2 .

Spørgsmål 2

Betragt det elektriske netværk givet herunder.

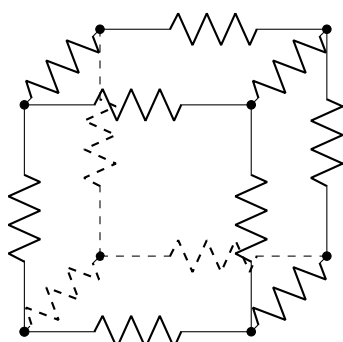


- Formuler Ohms lov for netværkets fem kanter. Bemærk, at spændingerne over mellemknodepunkterne er ukendt og er angivet ved u_1 og u_2 .
- Formuler Kirchhoffs strømlov for netværkets to mellemknodepunkter.
- Antag nu, at $U = 12.6 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_3 = 7 \Omega$, $R_2 = R_4 = 3 \Omega$, og $R_5 = 4 \Omega$. Beregn spændingerne u_1 , u_2 og alle strømme. Hvad er den totale elektriske strøm, der flyder fra +-polen til --polen?

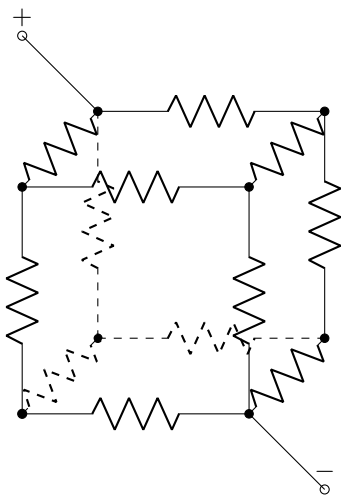
- d) Som ovenfor antages det, at $U = 12.6 \text{ V}$, $R_1 = 6 \Omega$, $R_3 = 7 \Omega$, og $R_2 = R_4 = 3 \Omega$. Antag yderligere, at den diagonale kant med modstand R_5 fjernes fra netværket. Hvor meget falder den totale strøm, der flyder fra +-polen til --polen?
- e) Antag nu, at $U = 12.6 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 7 \Omega$, $R_2 = R_4 = 3 \Omega$, og $R_5 = 4 \Omega$. Vis, at $I_5 = 0 \text{ A}$.
- f) Antag som i det forrige spørgsmål, at $U = 12.6 \text{ V}$, $R_1 = R_3 = 7 \Omega$, og $R_2 = R_4 = 3 \Omega$, men at $R_5 \in \mathbb{R}_{>0}$ er ukendt. Vis, at $I_5 = 0 \text{ A}$. Hint: beregn først den fuldstændige løsning til systemet af lineære ligninger.

Spørgsmål 3

Betragt nu et tredimensionelt elektrisk netværk, hvis kanter danner en kube. Se figuren nedenfor for en illustration.

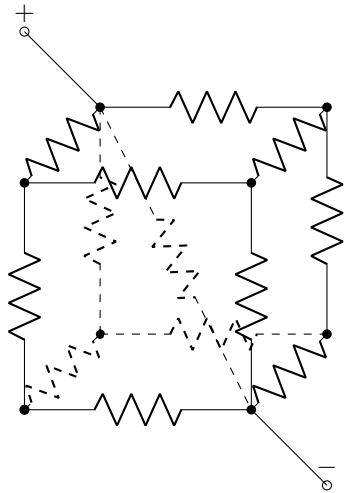


- a) Antag, at hver kant har en modstand på 2Ω . Hvis batteriets +- og --poler er tilsluttet det elektriske netværk som vist i figuren nedenfor, og batteriet har en spænding på 12.6 V , hvad er da den totale strøm fra +-polen til --polen?



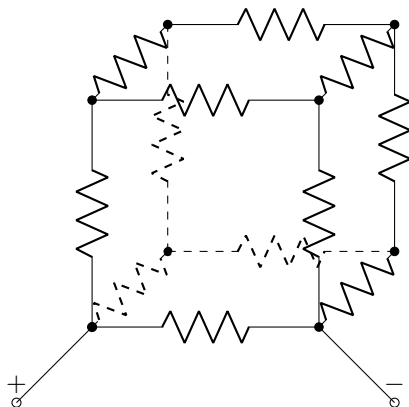
- b) Antag, at situationen er den samme som i forrige spørgsmål. En kant med en modstand på 5Ω tilføjes det elektriske netværk. Den nye kant udgør den af kubens diagonaler, der forbinder knudepunktet i kubens øverste-venstre-bageste hjørne med knudepunktet i det

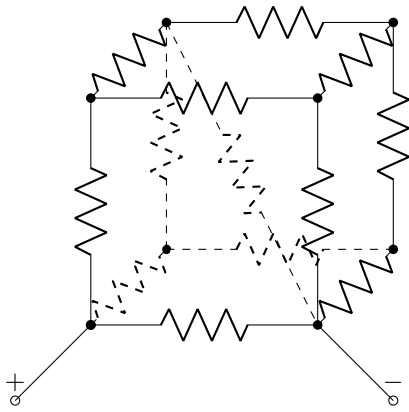
nederste-højre-forreste hjørne. Med andre ord forbinder den nye kant batteriets poler direkte. Se figuren nedenfor. Hvor meget øges den totale strøm fra $+$ -polen til $-$ -polen ved tilføjelse af denne kant?



c) Hvad skal værdien af modstanden på den diagonale kant være for at sikre en total strøm fra $+$ -polen til $-$ -polen på 100 A?

d) Gentag spørgsmålene fra a) og b), men denne gang med batteriets $+$ -pol tilsluttet som vist i figurene nedenfor:





- e) Hvilken værdi skal modstanden på den diagonale kant have for at den totale strøm fra +-polen til --polen maksimeres?